DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-105B WERD IN 2008/2009 GEGEVEN DOOR DR. A. ARTS.

Uitwerking[1] Klassieke mechanica (NS-105b) 30 januari 2009

Opgave 1: Rollen en transleren *(32 punten)*

a) Er moeten 6 krachten getekend worden:

- Zwaartekracht: in het midden van de schijf naar beneden, grootte Mg,
- Normaalkracht: op het contactpunt van de schijf met de helling, loodrecht op de helling, grootte N
- Wrijvingskracht: op het contactpunt, parallel aan de helling, omhoog gericht, grootte W
- Spanning in het touw, op het contactpunt van de schijf met het touw, grootte T
- Op het blok de zwaartekracht in het midden, naar beneden gericht, grootte mg.
- Spankracht in het touw, aangrijpend bovenaan het blok, grootte T omhoog gericht.

De wrijvingskracht op de schijf mag ook de andere kant op getekend worden. De krachten van het touw op de schijf en de massa m zijn aan elkaar gelijk, want het touw is massaloos. De normaalkracht op de schijf is gelijk aan $N = Mg\cos\theta$.

b) Als de schijf een versnelling a_s heeft dan is de versnelling van de massa $a_m = a_s + \alpha R$ want we raken geen touw kwijt, omdat de schijf slipvrij beweegt geldt $a_s = \alpha R$, dus $a_m = 2a_s$. Op dezelfde wijze $v_m = 2v_s$.

c) Methode 1: Behoud van mechanische energie: $\frac{1}{2}Mv_s^2+\frac{1}{2}I\omega_s^2+\frac{1}{2}mv_m^2+mgh_m+Mgh_s = \text{constant}$. Dit kunnen we differentiëren naar de tijd. Er geldt $\frac{dh_m}{dt} = v_m$ en $\frac{dh_s}{dt} = -v_s\sin\theta$. Resultaat: $Mv_sa_s+I\omega_s\alpha_s+mv_ma_m+mgv_m-Mgv_s\sin\theta = 0$. Na invullen van het resultaat van onderdeel b, kan door v_m gedeeld worden: $a_m = 4\frac{(M\sin\theta-2m)g}{3M+8m}$.

Methode 2: Bewegingsvergelijkingen voor translatie en rotatie. Translatie: $mg - T = ma_m$; $T + W - Mg\sin\theta = Ma_s$. Rotatie om massamiddelpunt schijf: $(T - W)R = I\alpha$. Nu op de tanden bijten en deze vergelijkingen met de condities uit onderdeel *b*) oplossen.

Opgave 2: Wetten van Kepler *(34 punten)*

a) In de cirkelbaan geldt $mv^2/R = MmG/R^2$ dus $v = \sqrt{MG/R}$: $L = \sqrt{MGR}$; $E = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/R = -GmM/2R$.

b) In peri- en aphelium staat de snelheid loodrecht op de voerstraal naar de aarde. Noem deze afstand r en de snelheid in dit punt v. Behoud impulsmoment $mvr = \sqrt{MGR}/2$. Behoud mechanische energie: $\frac{1}{2}mv^2 - GMm/r = -GmM/2R$. Invullen van de eerste in de tweede vergelijking en delen door mMG resulteert in $R/(8r^2) - 1/r + 1/(2R) = 0$ of $r^2 - 2rR + \frac{1}{4} = 0$. De oplossingen zijn $r_1 = R(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (perihelium) en $r_2 = R(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (aphelium).

c) Als we de snelheid van de postzak verkleinen (of vergroten) dan gaat de postzak een ellipsbaan beschrijven met lange as $2a$. De zak komt wel weer op hetzelfde punt terug, echter de omlooptijd is volgens de derde wet van Kepler veranderd. Als we er voor zorgen dat de nieuwe oplooptijd gelijk wordt aan de tjid dat de andere satelliet nodig heeft om op de plek van afschieten te komen dan kan de postzak opgepikt worden. Dus bereken eerst de halve omlooptijd in de cirkelbaan. Vervolgens met de derde wet van Kepler de gewenste lange as van de baan va nde postzak. Uit behoud van impulsmoment en behoud van energie kan de snelheid van de postzak voor hte

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

bereiken van deze baan berekend worden. De berekening gaat vrijwel analoog als in onderdeel *b*). Varianten op de procedure zijn mogelijk, b.v. dat de postzak en/of andere satelliet meerdere omwentelingen maken voordat ze op hetzelfde punt samenkomen.

Opgave 3: Trillingen

(34 punten)

a) Pas toe $\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Noem de uitwijking van de staaf op het uiteinde x. De kracht per veer is dan gelijk aan $F = -kx$ en het moment $\tau = -2kx(l/2) = -kxl$. Voor kleine waarden van x geldt in goede benadering $x = \theta l/2$. We krijgen dus als bewegingsvergelijking, met $I = \frac{1}{12}ml^2$, $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6k}{m}\theta = 0$. Dit is de harmonische vergelijking met $\omega = \sqrt{6k/m}$ en oplossing $\theta(t) = A\cos(\omega t+\phi)$. A en ϕ volgen door substitutie van de randvoorwaarden: $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$.

b) De evenwichtsafstand tussen de atomen volgt uit: $\frac{dU}{dx} = 0$. $\frac{dU}{dx} = 2U_0(1-\exp(-(x-x_0)/\delta))\exp(-(x-x_0)/\delta)/\delta = 0$. Dit kan alleen als $x = x_0$.

c) Voor kleine uitwijkingen kan de e-macht ontwikkeld worden (zie formuleblad) met als resultaat $U(x) = U_0(1-(1+(-\frac{x-x_0}{\delta})))^2 = \frac{U_0}{\delta^2}(x-x_0)^2$.

d) De kracht is gelijk aan $F = -dU/dx = -\frac{2U_0}{\delta^2}(x-x_0) = m\frac{d^2}{dt^2}(x-x_0)$. Dit is weer de harmonische vergelijking met $\omega = \sqrt{2U_0/m\delta^2}$.