Julius Instituut
Universiteit Utrecht

Uitwerking eindtoets MECHANICA, 1 februari 2008

Opgave 1: lineaal en knikker (30 punten)

a) Het is een volledig elastische botsing dus geldt voor knikker en lat de wet van behoud van mechanische energie. Ten opzichte van de rand van de tafel is er tijdens de botsing behoud van impulsmoment voor het systeem van knikker en lat. De reactiekrachten tussen de lat en de knikker heffen elkaar op en oefenen dus geen moment uit, de kracht van de tafel op de lat grijpt aan op de rand van de tafel (de lat gaat in eerste instantie om dit punt draaien)en oefent dus ook geen moment uit.

b) Hoe groot moet de massa M van het lineaaltje zijn opdat de knikker meteen na de botsing (even) stilstaat?

Antwoord: Vlak voor de botsing is de snelheid van de knikker $v = \sqrt{2gh}$, meteen na de botsing staat hij stil. Behoud mechanische energie: $\frac{1}{2}m(2gh) = \frac{1}{2}I\omega^2$, behoud van impulsmoment t.o.v rand tafel: $m\frac{1}{2}l\sqrt{2gh} = I\omega$. Los ω op en substitueer in de andere vergelijking, gebruik $I = \frac{1}{12}l^2$ en vind $M = 3m$.

Opgave 2: Trillingen (35 punten)

a) Leid af dat voor kleine uitwijkingen, de hoekfrequentie ω van deze slinger gelijk is aan $\sqrt{\frac{\alpha g}{R}}$. Wat is de waarde van α?.

Antwoord: Ten opzichte van het draaipunt P is het moment van de zwaartekracht, $\tau = -MgR\sin\theta \approx -MgR\theta$. Bewegingsvergelijking $-MgR\theta = I_P\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Dit is de harmonische vergelijking met $\omega = \sqrt{MgR/I} = \sqrt{g/(2R)}$, $(I_P = MR^2 + MR^2 = 2MR^2)$.

b) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen, $x/R \ll 1$, het deeltje een harmonische beweging uitvoert met frequentie $\omega = \sqrt{\alpha g/R}$, met g gelijk aan $g = GM/R^2$. Bepaal α. (Taylorontwikkeling: $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$).

Antwoord: De potentiële energie van de massa in de pijp is als functie van x gelijk aan $U(x) = -GMm/\sqrt{R^2+x^2}$, voor kleine uitwijkingen t.o.v. R kan dit ontwikkeld worden in $U(x) = -\frac{GMm}{R}(1 + x^2/R^2)^{-1/2} \approx -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}x^2$. Dit is effectief de potentiële energie van een veer met veerconstante $k = \frac{GMm}{R^3}$, de frequentie van de trilling is dan $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R}$, met $g = GM/R^2$. (De opgave kan ook met krachten opgelost worden.)

c) Op het tijdstip $t = 0$ is de positie van het deeltje x_0 en de snelheid v_0 gericht naar het midden, $x = 0$, van de buis. Geef de oplossing voor de plaats x(t) van het deeltje als functie van de tijd.

Antwoord: De algemene oplossing van de bewegingsvergelijking is $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, met A en ϕ nader te bepalen constanten. Op $t = 0$ is de positie x_0, hieruit volgt $A\cos\phi = x_0$; op $t = 0$ is de snelheid $-v_0$, hieruit volgt $-A\omega\sin\phi = -v_0$; oplossen van A en ϕ leidt tot $x(t) = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}\cos(\omega t + \phi)$, met $\tan\phi = v_0/(x_0\omega)$. Uitgaande van $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, of $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ zijn ook andere equivalente oplossingen mogelijk.

Opgave 3: Vlucht naar Mars (35 punten)

a) Bereken de snelheid v_A van de aarde om de zon.

Antwoord: Tweede wet Newton in cirkelbaan: $mv_A^2/R = GmM/R^2$, waaruit volgt $v_A = \sqrt{GM/R}$.

b) Vanuit de aardbaan wordt een ruimtesonde in de getoonde Hohmann-baan gebracht en naar Mars gestuurd. Dit gebeurt door kortstondig met raketten in het raakpunt de snelheid van de sonde te vergroten naar αv_A. Bereken de waarde van α waarvoor de sonde de marsbaan bereikt.

Antwoord: In de ellipsbaan geldt behoud van mechanische energie en behoud van impulsmoment t.o.v. de zon. We vergelijken de twee uiterste punten. Energiebehoud: $-GMm/R + \frac{1}{2}m\alpha^2 v_A^2 = -GMm/(\frac{3}{2}R) + \frac{1}{2}mv_M^2$, met m de massa van de sonde en v_M de snelheid in het raakpunt met de marsbaan. Impulsmomentbehoud: $m\alpha v_A R = mv_M(\frac{3}{2}R)$. Twee vergelijkingen met twee onbekenden, α en v_M. Uit de tweede vgl v_M oplossen en invullen (samen met v_A) in de andere vergelijking resulteert in $\alpha = \sqrt{6/5}$.

c) Aangekomen in het verste punt van de ellips wordt de snelheid van de sonde gelijkgemaakt aan de snelheid van Mars in de marsbaan. Bereken de hoeveelheid energie die de totale expeditie heeft gekost.

Antwoord: Een antwoord dat geen gebruik maakt van het resultaat in het vorige onderdeel kan gevonden worden door het verschil te nemen van de totale mechanische energie van de sonde in de marsbaan en de aardbaan. Aardbaan: $E_A = -GMm/R + \frac{1}{2}mv_A^2 = -GMm/2R$; Analoog marsbaan $E_M = -GMm/(3R)$. Dus $\Delta E = E_M - E_A = GMm/(6R)$. Alternatief met de snelheden uit onderdeel b): Toename kinetische energie in aardbaan: $\frac{1}{2}m(\alpha^2 - 1)v_A^2 = \frac{1}{10}GMm/R$. Toename kinetische energie in marsbaan $\frac{1}{2}mGM/(\frac{3}{2}R) - \frac{1}{2}m\frac{4}{9}\alpha^2 v_A^2 = \frac{1}{15}GMm/R$; Totaal $\frac{1}{6}GMm/R$.

d) Bereken de vluchttijd.

Antwoord: Gebruik de derde wet van Kepler (formuleblad): $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$, waarin a de lengte van de halve lange as van de ellips is. De vluchttijd is gelijk aan $T/2 = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2(\frac{5}{4}R)^3/(GM)}$. Invullen van getalwaarden (niet gevraagd) resulteert in $T/2 \approx 250$ dagen.