ng-105b

1

JULIUS INSTITUUT
UNIVERSITEIT UTRECHT

# Herkansing MECHANICA, 19 maart 2008

Maak elke opgave op een apart vel. Zet op elk vel uw naam en studentnummer

## Opgave 1: Wetten van Newton (30 punten)

a) Als je een steen 10 meter recht omhoog kan gooien, hoe ver kan je dan dezelfde steen weggooien, aannemende dat de steen na neerkomen stil blijft liggen (verwaarloos luchtwrijving).

b) Op een deeltje werkt een remmende kracht $F = bv^{5/2}$, waarin $b$ een constante is en $v$ de snelheid. Op $t = 0$ is de snelheid $v_0$. Op welk tijdstip is de snelheid tot een kwart afgenomen.

c) Een deeltje met massa $m$ heeft op het punt $x = 0$ een snelheid $v_0$ in positieve richting. Voor $x \geq 0$ ondervindt het deeltje een kracht $F(x) = -ax^3$. Hoe ver komt het deeltje?

## Opgave 2: IJsrevue (35 punten)

Twee schaatsers $A$ en $B$ bevinden zich op een bevroren lang recht kanaal. Schaatser $A$ staat stil en heeft een massaloze stok met lengte $l$ vast. De stok wijst evenwijdig aan het ijs en staat loodrecht op de lengterichting van het kanaal. Schaatser $B$ schaatst in de lengterichting van het kanaal met eenparige snelheid $v$ en passeert $A$ op afstand $l$. Bij het passeren pakt $B$ het vrije uiteinde van de stok vast waarna hun onderlinge afstand $l$ blijft. Beide schaatsers hebben massa $m$ en kunnen voor dit probleem als puntmassa's beschouwd worden. Wrijvingskrachten zijn te verwaarlozen.

a) Teken de baan van het massamiddelpunt voor en na de ontmoeting en bereken de snelheid $v_m$ van het massamiddelpunt.

b) Hoe groot is na de ontmoeting de hoeknelheid $\omega_m$ van de schaatsers t.o.v. hun massamiddelpunt. Bereken de kinetische energie van de twee schaatsers na de ontmoeting. Geldt energiebehoud en waarom wel/niet?

c) Een toeschouwer, die op de walkant zit te kijken, neemt waar dat in zijn stelsel iedere schaatser regelmatig in rust is. Hoe groot is de tijdsduur tusen de rustmomenten van $A$? Welke afstand liggen de rustposities van $A$ uitelkaar? Wat is de positie van de stok wanneer $A$ in rust is? Teken de banen die beide schaatsers in het ijs krassen.

d) Met enige inspanning verkleinen de schaatsers hun onderlinge afstand van $l$ tot $x$. Bereken de nieuwe hoeksnelheid om het massamiddelpunt.

**Opgave 3: Trilling om een evenwichtspunt** (35 punten)
Drie positief geladen deeltjes bevinden zich op een rechte lijn. De buitenste deeltjes zijn identiek en worden vastgehouden op een afstand $2R_0$ van elkaar. De potentiële energie van de kracht die werkt op het middelste deeltje kan als volgt worden geschreven: $U = A(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-2R_0})$; hierbij is $A$ een constante en $r$ is de afstand van het linker deeltje tot het middelste deeltje.

a) Leid af dat de kracht $F$ op het middelste deeltje voldoet aan:
$F = A(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r-2R_0)^2})$.

b) Laat zien dat in de evenwichtstoestand geldt dat $r = R_0$.

c) Substitueer $r = R_0 + \Delta r$ en toon aan dat voor kleine uitwijkingen geldt: $F \approx -(\frac{4A}{R_0^3})x$.
Hint: Gebruik de eerste twee termen van een Taylor-ontwikkeling.

d) Bepaal de frequentie van kleine trillingen om de evenwichtspositie als de massa van het middelste deeltje gelijk is aan $m$.

# FORMULEBLAD KLASSIEKE MECHANICA

## Dynamica van één deeltje

- Newton: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$.
- eenparig versnelde translatie: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
- impulsmoment: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

## Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ of $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\mathrm{grad}\, U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U$ =Constant.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{F}_i = 0$.

## Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$.
- Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}_{cm}$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{L} = \sum_i \vec{r'}_i \times m_i \vec{v'}_i + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$; $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische Energie: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

## Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{r} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{L} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL^2$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ ($p$ is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

## Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie $E$. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L =$ constant (perkenwet).
- Kepler 3: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

**Trillingen**

- Bewegingsvergelijking: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

**Sinus- en cosinusformules**

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$

**Taylor-ontwikkeling**

- Voor kleine $\epsilon$ geldt: $(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \ldots$

**Engels - Nederlands**

- Momentum – impuls
- Angular momentum – impulsmoment
- Impulse – stoot
- Moment of inertia – traagheidsmoment
- Torque – (kracht)moment