DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE
UNIVERSITEIT UTRECHT

EINDTENTAMEN Speciale Relativiteitstheorie 2015 - NS106B

Woensdag, 4 November 2015, 13:30-16:30, Educatorium Beta.

1) Schrijf je naam en studentennummer op elk oplossingsblad. Begin elke opgave op een nieuw blad. Bij het inleveren moet je elke opgave op een aparte stapel leggen!

2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.

3) Er zijn drie opgaven. Het resultaat telt mee voor 70% van het eindcijfer.

4) Het gebruik van het dictaat, boeken, rekenmachines, e.d., is niet toegestaan.

Formularium

Bij deze opgaven veronderstellen we steeds twee inertiaalwaarnemers O en O' met gesynchroniseerde klokken. Waarnemer O' beweegt met constante snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van O. Zoals steeds is c de lichtsnelheid, afgerond $c = 3 \times 10^8\, m/s$.

- De speciale Lorentz-transformaties in één dimensie zijn

$$x' = \gamma(x - vt) \; ; \qquad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \; , \tag{1}$$

waarbij

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \, , \qquad \beta \equiv \frac{v}{c} \; . \tag{2}$$

De transformatie van de snelheid van een deeltje is dan

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \; , \tag{3}$$

waarbij u de snelheid van het deeltje is t.o.v. O, en u' t.o.v. O'. In bovenstaande formule zijn u en v positief gekozen en beweegt het deeltje in dezelfde richting als O'.

- De energie en het impuls van een deeltje met massa m en snelheid $\vec{u}$ zijn gegeven door $E = mc^2\gamma_u$ en $\vec{p} = m\vec{u}\gamma_u$, waarbij $\gamma_u^{-2} = 1 - u^2/c^2$ en $u^2 \equiv \vec{u} \cdot \vec{u}$. Er geldt de relatie $E^2 = \vec{p}^2c^2 + E_0^2$, waarbij $E_0 = mc^2$ de rustenergie is. Voor massaloze deeltjes, zoals fotonen, gelden er de relaties $E = pc = hf$, met h de constante van Planck, f de frequentie behorende bij het deeltje, en $p \equiv \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$. De kracht $\vec{F}$ op een deeltje genereert een verandering van impuls via

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \ . \tag{4}$$

- Het inproduct tussen vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is gegeven door $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + \ldots$ en voldoet aan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\theta \ , \tag{5}$$

waarbij θ de hoek is tussen de twee vectoren en $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

1. **Klokken** (3 punten)

Een klok is in rust in de oorsprong van een inertiaalstelsel O. Een tweede klok is in rust in de oorsprong van een inertiaalstelsel O' die beweegt met constante snelheid v in de richting van de positieve x-as. De klokken lezen $t = t' = 0$ wanneer O' stelsel O passeert. O' leest op zijn klok t_2' wanneer een radiosignaal bij hem aankomt, verzonden door O op tijdstip t_1.

- Teken een ruimtetijd diagram dat dit proces beschrijft.
- Bepaal de ruimtetijd coordinaten (t_2, x_2) in O van de gebeurtenis waarop O' het radiosignaal ontvangt en laat zien dat

$$x_2 = vt_2 \ , \qquad t_2 = \frac{t_1}{1 - v/c} \ . \tag{6}$$

- Toon vervolgens aan dat

$$t_2' = t_1 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \ . \tag{7}$$

2. **Krachten** (4 punten)

Beschouw een deeltje dat kan bewegen in het (x, y)-vlak. Initieel, op tijdstip $t_0 = 0$, heeft het een beginimpuls in de x-richting gegeven door de impulsvector

$$\vec{p}_0 = (p_0, 0) \ . \tag{8}$$

Vanaf $t_0 = 0$ laten we nu een constante kracht op het deeltje werken die loodrecht staat op $\vec{p}_0$, dus in de y-richting. We noteren de krachtvector als

$$\vec{F} = (0, F) \ . \tag{9}$$

- Toon aan dat de snelheden van het deeltje in de x- en y-richtingen gegeven worden door de vergelijkingen

$$\gamma_u \, u_x = \frac{p_0}{m} \,, \qquad \gamma_u \, u_y = \frac{Ft}{m} \,. \tag{10}$$

- Bereken vervolgens hoe de relativistische energie van het deeltje verandert in de tijd, en toon aan dat het resultaat kan geschreven worden als

$$E(t) = \sqrt{E_0^2 + (Fct)^2} \,, \tag{11}$$

  waarbij E_0 de energie van het deeltje op tijdstip $t_0 = 0$ is (dus niet de rustmassa).

- Bereken dan expliciet hoe de snelheden $u_x(t)$ en $u_y(t)$ van de tijd afhangen. Bereken verder de grootte van de snelheid en laat zien dat die niet groter dan de lichtsnelheid wordt. In het bijzonder, wat zijn de limieten van beide snelheden u_x en u_y voor $t \to \infty$?

3. Higgs deeltje (3 punten)

In de Large Hadron Collider bij Cern is het Higgs deeltje ontdekt dat een rustmassa heeft van afgerond $m_H c^2 = 125 GeV$ (Giga-electronVolt). Het Higgs deeltje vervalt, en een van de vervalprocessen is naar twee fotonen, $H \to \gamma\gamma$, waarbij γ staat voor het foton lichtdeeltje (hier niet te verwarren met de Lorentzfactor!). Tijdens het verval zijn impuls en energie behouden.

- Beschouw het verval $H \to \gamma\gamma$ in het ruststelsel van het Higgs deeltje. Toon aan dat dan de grootte van het impuls en de energie van beide fotonen gegeven worden door

$$|p_\gamma| = \frac{m_H c}{2} \,, \qquad E_\gamma = \frac{m_H c^2}{2} \,. \tag{12}$$

- Beschouw nu het verval in het laboratoriumstelsel. De impulsvector van het foton zal nu een hoek θ maken ten opzichte van de impulsvector $\vec{p}_H$ van het Higgs deeltje. Stel we meten de energie van een van de twee fotononen en noteren die met E_γ. Gebruik nu behoud van energie en impuls om aan te tonen dat de vervalhoek gegeven wordt door

$$cos\theta = \frac{2E_H E_\gamma - m_H^2 c^4}{2E_\gamma \sqrt{E_H^2 - m_H^2 c^4}} \,, \tag{13}$$

  waarbij E_H de energie is van het Higgs deeltje (gemeten in het laboratorium stelsel).