Tweede tussentoets Klassieke Mechanica

October 13, 2016

Schrijf op ieder blad wat je inlevert duidelijk je naam, studentnummer en het nummer van je tutorgroep. Als je geen tutorgroep hebt, schrijf je tutorgroep 13 op. Lever de twee opgaven in op aparte bladen.

Schrijf duidelijk, onleesbaar werk kan niet worden nagekeken. Je kunt voor deze toets maximaal 15 punten behalen.

LET OP: deze toets bestaat uit twee bladzijden!

1 Vraag 1

We beschouwen een deeltje met massa m waarop de kracht

$$F = -mg - \kappa x,$$

werkt. Dit is dus een harmonische oscillator waar ook zwaartekracht op werkt.

1a (2 punten) Beschrijf in twee zinnen wat er zal gebeuren als we het deeltje op $t = 0$ met een snelheid $v(0) = 0$ van positie $x(0) = 0$ los laten.

1b (1 punt) Bepaal de formule voor de potentiele energie $V(x)$. Noem de potentiele energie op $V(0) = V_0$.

1c (1 punt) Bereken op welke positie x_{min} de potentiele energie minimaal is. Bereken ook wat de potentiele energie op dat punt is.

1d (1 punt) Bereken welke waarde we voor V_0 moeten kiezen om te zorgen dat het minimum van de potentiele energie nul is (m.a.w. $V(x_{\text{min}}) = 0$).

1e (1 punt) Wat is de totale energie van het deeltje met de begin condities zoals die staan in vraag **1a**?

1f (1 punt) Bepaal door gebruik te maken van energiebehoud wat de amplitude van de oscillatie van het deeltje zal zijn onder de bovengenoemde condities.

2 Vraag 2

We beschouwen een deeltje met massa m waarop de kracht

$$F = -mg - \kappa x - cv,$$

werkt. Neem aan dat c klein genoeg is, zodat de beweging gedempt oscillerend zal zijn.

2a (1 punt) We kunnen nu geen potentiele energie definieren, waarom niet?

2b (1 punt) Omdat de oscillatie dempt, zal het deeltje na zeer lange tijd naar een bepaalde positie toe gaan. Bereken met een eenvoudig argument naar welke positie het deeltje zal gaan.

2c (1 punt) Beredeneer dat wanneer $x(0) = 0$ en $v(0) = 0$, de positie kan worden geschreven als

$$x(t) = A + B\cos\omega t e^{-\gamma t},$$

en beredeneer wat de constantes A en B in dat geval moeten zijn. De waardes van de constantes ω en γ hoef je nog niet te geven.

Nu gaan we controleren of de bovenstaande probeer-oplossing inderdaad een oplossing is van de differentiaal vergelijking.

2d (1 punt) Bereken daartoe eerst de eerste tijdsafgeleide $\dot{x}$ en de tweede tijdsafgeleide $\ddot{x}$.

2e (2 punten) Vul je resultaten in in de bewegingsvergelijking $m\ddot{x} = -mg - \kappa x - c\dot{x}$ en laat zien dat hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + m\gamma^2 - c\gamma + \kappa &= 0 \\ 2m\gamma\omega - c\omega &= 0 \\ \kappa A + mg &= 0 \end{aligned}$$

2f (2 punten) Los uit de bovenstaande oplossing de waardes voor de constantes A, γ en ω op. Hint: gebruik eerst de tweede vergelijking om γ te bepalen en vul die waarde vervolgens in de eerste vergelijking in.