

## Mechanica, tussentoets (NS-105b) 21 december 2005

### Opgave 1: Variabele wrijvingskracht

(20 punten)

Een blok met massa  $m$  glijdt over een horizontaal oppervlak dat bedekt is met olie. Ten gevolge hiervan ondervindt het blok een wrijvingskracht die van de snelheid afhangt volgens  $F(v) = -cv^{1.5}$ , waarin  $c$  een positieve constante is. De beginsnelheid van het blok is gelijk aan  $v_0$  op de positie  $x = 0$ .

- Stel de bewegingsvergelijking voor het blok op.
- Bereken de snelheid  $v(t)$  van het blok als functie van de tijd.

### Opgave 2: Potentiële energie-functie

(25 punten)

Op een ion werken twee krachten, een kracht die voldoet aan de wet van Hooke ( $-kx$ ) en een constante conservatieve kracht  $F$  in de positieve  $x$ -richting.

- Laat zien dat  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - \frac{F^2}{2k}$  een ogelijke potentiële energie-functie is voor deze combinatie van krachten.
- Is dit de enig mogelijke functie? Licht uw antwoord toe.
- Bepaal de stabiele evenwichtspositie.
- Teken  $U(x)$  (in eenheden van  $F/k^2$ ) als functie van  $x$  (in eenheden van  $F/k$ ) voor waarden van  $x$  tussen  $-5F/k$  en  $5F/k$ .
- Als gegeven is dat de totale energie gelijk is aan  $E = F^2/k$ , wat zijn dan de minimale en maximale waarden van  $x$  die het ion tijdens zijn beweging kan bereiken?

### Opgave 3: Rollen zonder slippen

(30 punten)

Een massieve cilinder met straal  $r$  en massa  $m$  rolt slipvrij van een helling met hellingshoek  $\phi$ .

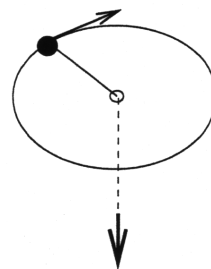
- Waarom weten we dat er een wrijvingskracht werkt?
- Teken een krachtendiagram van de krachten die op de cilinder werken. Let hierbij goed op de aangrijppunten van de krachten!
- Wat is bij slipvrij rollen het verband tussen de versnelling  $a$  en de hoekversnelling  $\alpha$ ?
- Stel de bewegingsvergelijkingen voor transleren en roteren op.
- Bepaal nu uit de bovenstaande vergelijkingen de versnelling  $a$ .
- Hoeveel energie gaat er verloren door wrijving?

#### Opgave 4: Draaiend blokje

(25 punten)

Een blok met massa  $m$  beweegt met constante snelheid  $v$  in een cirkelbaan met straal  $r_1$  op een wrijvingsloos oppervlak. Het blok wordt in de baan gehouden door een massaloos touw dat door een gat in het oppervlak gaat. Aan het touw wordt getrokken waardoor de straal van de cirkel afneemt tot  $r_2$ .

- Welke behoudswet(ten) gelden hier? Motiveer!
- Bereken de snelheid waarmee het blok ronddraait als de straal gelijk is aan  $r_2$ .
- Bereken de arbeid die de trekkracht verricht heeft bij het reduceren van de straal.



## Formuleblad Klassieke mechanica

### Dynamica van een deeltje

- Newton:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ,  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$
- eenparig versnelde translatie:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ ,  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
- impulsmoment:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , krachtmoment:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ,  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .

### Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$  voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  of  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\text{grad } U$ .
- Behoud van mechanische energie:  $K + U = \text{Constant}$ .
- Vermogen:  $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ .
- Evenwicht:  $\sum_i \vec{F}_i = \mathbf{0}$ .

### Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt  $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$ .
- Impuls:  $\vec{p} = m\vec{v}_{cm}$ ;  $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$ .
- Impulsmoment:  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$ ;  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ .
- Kinetische energie:  $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ ;
- Botsingen; Impulsbehoud:  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ ;  
Energiebehoud:  $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$ .

### Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt  $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{r} dV$
- Traagheidsmoment:  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ;  $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$ ;  $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$  (massieve cilinder),  $\frac{2}{5}mR^2$  (massieve bol),  $\frac{1}{12}mL$  (dunne lat).  
Regel van Steiner (parallele assen-theorema):  $I_p = I_{cm} + Md^2$  ( $p$  is draaias).
- Bewegingsvergelijking:  $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$ .  
Kinetische energie:  $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ . Arbeid:  $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ .

### Hemelmechanica

- Gravitatiewet:  $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie:  $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal  $-\frac{k}{r^2}$  krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie  $E$ . Ellips:  $E < 0$ , Parabool:  $E = 0$ , Hyperbool:  $E > 0$ .
- Kepler 2:  $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$  (perkenwet).
- Kepler 3:  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ .

### Trillingen

- Bewegingsvergelijking:  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2x$

### Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ ;  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$

### Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine  $\varepsilon$  geldt:  $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$

### Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment