

Uitwerking¹ Mechanica (NS-105b) 21 december 2005

Opgave 1. Variabele wrijvingskracht

(20 punten)

- a) Bewegingsvergelijking: tweede wet van Newton: $F = -cv^{\frac{3}{2}} = m dv/dt$ let op het $-$ teken, randvoorwaarde $t = 0, v = v_0, x = x_0$.
- b) Dit kunnen we schrijven als $\int \frac{c}{m} dt = \int -\frac{dv}{v^{3/2}}$, integreren levert $\frac{ct}{m} = \frac{2}{\sqrt{v}} + \text{constante}$. De constante volgt uit de randvoorwaarde $t = 0, v = v_0$, $\text{constante} = -\frac{2}{\sqrt{v_0}}$. Omschrijven (de constante naar de andere kant brengen, kwadrateren en omkeren), resulteert in $v(t) = v_0 / (1 + \frac{c\sqrt{v_0}t}{2m})^2$.

Opgave 2. Potentiële energie-functie

(25 punten)

- a) $U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\int (-kx + F) dx = \frac{1}{2}kx^2 - Fx + \text{constante}$. De constante mogen we vrij kiezen, hiermee leggen we het nulpunt van de potentiële energie vast.
- b) Nee, elke constante is goed, mits we daarmee consequent doorrekenen.
- c) Stabiël evenwicht: som van de krachten is nul, minimum van $U(x)$. $dU/dx = 0 = kx - F$, $x = F/k$.
- d) In de uiterste punten is de kinetische energie gelijk aan nul en is er alleen potentiële energie. $\frac{E^2}{k} = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - \frac{F^2}{2k}$. Oplossing $x = 3F/k$ en $x = F/k$.

Opgave 3. Rollen zonder slippen

(30 punten)

- a) Om de cilinder aan het rollen te krijgen, is er een moment nodig. De wrijvingskracht is de enig mogelijk werkende kracht die een netto moment t.o.v. het massamiddelpunt heeft.
- b) De krachten op de cilinder zijn 1. de zwaartekracht mg , grijpt aan in het massamiddelpunt; 2. de normaalkracht op de helling, staat loodrecht op de helling en grijpt aan in het contactpunt; 3. de wrijvingskracht, is gericht langs de helling en grijpt aan in het contactpunt.
- c) Het contactpunt staat momentaan stil (slipt niet), dus $a = \alpha r$.
- d) Translatie: Newton langs de helling: $mg \sin \phi - W = ma$. Rotatie om het massamiddelpunt: $Wr = I\alpha, I = mR^2/2$.
- e) Oplossen van de vergelijkingen: $a = \frac{2}{3}g \sin \phi$.
- f) De wrijvingskracht verricht geen arbeid (slipvrij!). Er gaat dus geen energie verloren door wrijving.

Opgave 4. Draaiend blok

(25 punten)

- a) Behoud van impulsmoment t.o.v. het centrum van de schijf. Er is geen moment t.o.v. dit punt. Geen behoud van impuls, er werkt een externe kracht. Behoud van mechanische energie als de kracht F conservatief is.
- b) Behoud impulsmoment: $mvr_1 = mv_2r_2$. Dus $v_2 = r_1 \frac{v}{r_2}$.

¹Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de \mathcal{TC} niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

- c) De arbeid die de trekkraft verricht heeft moet gelijk zijn aan het verschil in kinetische energie voor en na het trekken: $A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2(r_1^2 - r_2^2)/r_2^2$.