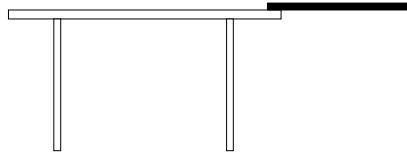


DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE \mathcal{TC} VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-105B WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR TOINE ARTS.

Klassieke Mechanica, eindtentamen (NS-105b) 2 februari 2005

Opgave 1: Een horizontale lat (25 punten)

Een lat (massa m , lengte L) rust met een uiteinde op de rand van een tafel en wordt met het andere uiteinde met de hand ondersteund. De lat ligt horizontaal. De hand wordt plotseling teruggetrokken. Op dat moment begint de lat te draaien om het contactpunt met de tafel.



- Hoe groot is net na het tijdstip van loslaten het moment van de lat t.o.v. het draaipunt op de rand van de tafel?
- Hoe groot is dan de hoekversnelling op dat punt?
- Hoe groot is dan de verticale versnelling van het massamiddelpunt van de lat?
- Hoe groot is dan de kracht die op dat moment de tafel op de lat uitoefent?

Consequent doorrekenen met foutieve eerdere antwoorden wordt goedgekeurd.

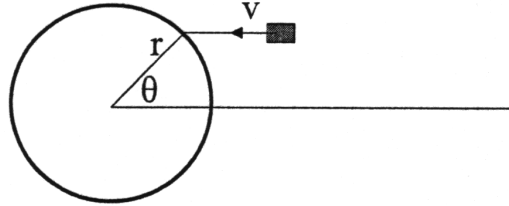
Opgave 2: Keplerwetten (25 punten)

- Een satelliet beweegt in een ellipsvormige baan om de aarde. De kortste afstand tot het centrum van de aarde is a en de grootste afstand is $2a$. Bereken de snelheid van de satelliet in beide punten. Geef het antwoord in de grootheden G , de gravitatieconstante, M de massa van de aarde en a .
- In de ruimte wordt een komeet waargenomen op een afstand van de zon die q keer zo groot is als de afstand van de aarde tot de zon. De komeet beweegt met een snelheid die een factor d keer zo groot is als de snelheid van de aarde in de cirkelbaan om de zon. Vraag: Aan welk getal moet het product d^2q gelijk zijn opdat de baan van de komeet een parabool om de zon is?

Opgave 3: Draaimolen

(25 punten)

In een speeltuin springt een kind op een stilstaande draaimolen, waardoor de molen in beweging komt. De precieze situatie is weergegeven in onderstaande figuur. De draaimolen beschouwen we als een homogene schijf met straal r en massa M . Het kind heeft een massa m en beweegt met snelheid v evenwijdig aan de getekende x -as. De plek waar het kind contact maakt met de draaimolen wordt gegeven door de hoek θ en de straal r .

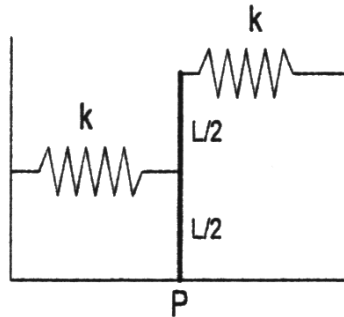


- Welke behoudswetten gelden er wel en niet bij deze botsing? Motiveer uw antwoord.
- Bereken de hoeksnelheid van de molen na de botsing.
- Hoeveel mechanische energie is er bij de botsing verloren gegaan?

Opgave 4: Lat tussen twee veren

(25 punten)

Een lat met massa m en lengte L is met twee gelijke veren (veerconstante k) ingeklemd tussen twee verticale wanden. De lat kan roteren om het bevestigingspunt P met de bodem. Op het tijdstip $t = 0$ staat de lat verticaal en heeft het uiteinde een snelheid v naar rechts. Verwaarloos in eerste instantie de zwaartekracht.



- Stel de bewegingsvergelijking van de lat op en bepaal hiermee de frequentie waarmee de lat voor kleine draaihoeken θ om P gaat slingeren.
- Bereken voor de gegeven randvoorwaarden de draaihoek θ als functie van de tijd.
- Als we nu wel de zwaartekracht meenemen (valversnelling g), hoe groot moet dan de veerconstante k zijn opdat de beweging nog altijd harmonisch is?

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}'_i + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}; \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2$;
Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}; I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV; I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
Regel van Steiner (parallele assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmecanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E . Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment