Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-105b werd in 2004/2005 gegeven door Toine Arts.

Klassieke mechanica, tussentoets (NS-105b)
15 december 2004

Opgave 1: Variabele wrijvingskracht

Een blok met massa m glijdt over een horizontaal oppervlak dat bedekt is met olie. Ten gevolge daarvan ondervindt het blok een wrijvingskracht die van de snelheid v afhangt volgens $F(v) = -bv^2$, waarbij b een positieve constante is. Op tijdstip $t = 0$ is de snelheid van het blok gelijk aan v_0.

a) Wat is de eenheid van b?

b) Teken een krachtendiagram van het blok en stel de bewegingsvergelijking op.

c) Bereken de snelheid $v(t)$ als functie van de tijd t en laat zien dat de eenheid klopt.

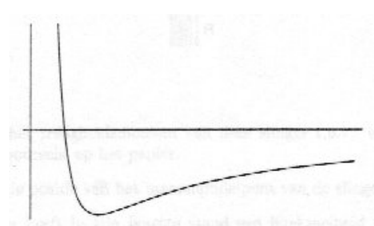
d) Bepaal het tijdstip waarop de snelheid nog maar 10% van de beginsnelheid v_0 is.

Opgave 2: Beweging van een proton in één dimensie

Een proton met massa m beweegt in één dimensie. De potentiële energie wordt gegeven door:

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right].$$

Hierin is α een positieve constante. Het proton wordt vanuit rust losgelaten in x_0. Een tekening van $U(x)$ is te zien in bijgaande figuur. De getekende assen stellen de x- en de y-as voor.



a) Bereken $U(x_0)$ en geef dit punt aan in de figuur.

b) Leid af dat de snelheid van het proton voldoet aan:

$$v(x) = \sqrt{\left(\frac{2\alpha}{mx_0^2}\right)\left(\frac{x_0}{x} - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right)}$$

c) Schets $v(x)$. Schaal de x-as op ongeveer dezelfde manier als is gedaan bij $U(x)$. Let hierbij goed op het bereik!

d) Voor welke waarde van x heeft het proton maximale snelheid?

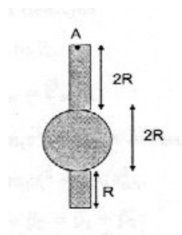
e) Geef dit punt van maximale snelheid aan in zowel de grafiek van $U(x)$ als die van $v(x)$ en motiveer uw keuze.

f) Wat kunt u zeggen over de grootte en de richting van de kracht die op het proton werkt op de verschillende plaatsen langs de x-as?

g) Het proton wordt nogmaals vanuit rust losgelaten,m maar dit keer vanaf positie $x = 3x_0$. Leg kwalitatief uit hoe het protopn gaat bewegen. Maak daarbij gebruik van een tekening van $U(x)$.

Opgave 3: Staartklok

De slinger van een zekere staartklok ziet er in benadering uit als een schijf (straal R, massa m) geklemd tussen twee dunne staven, een staaf met lengte $2R$ en massa m en een staaf met lengte R en massa $m/2$ (zie figuur).



a) Bereken het traagheidsmoment van deze slinger t.o.v. een as door het punt A loodrecht op het papier.

b) Bereken de positie van het massamiddelpunt van de slinger.

c) De slinger heeft in zijn laagste stand een hoeksnelheid ω. Bereken de stand van de slinger (de hoek die de slinger maakt met de verticale as) in de uiterrster positie. Druk het antwoord uit in de grootheden ω, R, m en g de versnelling van de zwaartekracht. Als u het massamiddelpunt niet heft kunnen uitrekenen neem dan aan dat dit op een afstand $\frac{5}{3}R$ van het punt A ligt.

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1' + \vec{\mathbf{p}}_2'$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \ldots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment