Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-105B werd in 2005/2006 gegeven door A.F.M. Arts.

Uitwerking[1] Mechanica (NS-105B)
3 februari 2006

Opgave 1: Massamiddelpunt *(20 punten)*

a) De beweging is samengesteld uit een eenparige translatie van het massamiddelpunt en een rotatie om het massamiddelpunt. Er zijn geen externe krachten en momenten dus de translatie en rotatie zijn eenparig (constante snelheid en hoeksnelheid).

b) De snelheid van het massamiddelpunt is gelijk aan $v_m = m_2 v/(m_1 + m_2)$. T.o.v. het massamiddelpunt is de snelheid van m_2, $v - v_m = m_1 v/(m_1 + m_2)$. De afstand van het massamiddelpunt tot m_2 is gelijk aan $m_1 l/(m_1 + m_2)$, de centripetaal gerichte versnelling $a = v^2/r$ is dus $a = m_1 v^2/l(m_1 + m_2)$ en de spankracht $S = m_2 a = m_2 m_1 v^2/l(m_1 + m_2)$. (De berekening kan ook via de massa m_1)

Opgave 2: Oscillerende planeet *(25 punten)*

a) $U(z) = -2mMG/\sqrt{r^2 + z^2}$

b) $z \gg r \rightarrow U = -2mMG/z,\ F(z) = -fracdUdz = -2mMG/z^2$
$z \ll r \rightarrow U = \frac{-2mMG}{r}(1 + z^2/r^2)^{-1/2},\ F(z) = -2mMGz/r^3$

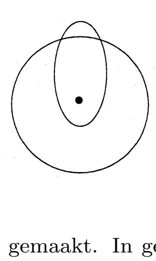
c) Bewegingsvergelijking: $F(z) = -2mMGz/r^3 = m\frac{d^2z}{dt^2}$. Dit is een harmonische vergelijking met $\omega^2 = 2MG/r^3$, $T = 2\pi/\omega$

Opgave 3: Satelliet om de aarde *(25 punten)*

a) Voor de botsing geldt de wet van behoud van impuls. De snelheid in de richting van de aarde wordt $v_0/2$, de snelheid langs de raaklijn van de cirkel wordt ook $v_0/2$, de massa wordt immers 2 keer zo groot. Mechanische energie: $E = \frac{1}{2}(2m(v_0/2)^2) - 2mMG/R$ Voor de cirkelbeweging geldt $v_0^2 = GM/R$, invullen: $E = -3mMG/2R$. Impulsmoment t.o.v. centrum aarde $L = mv_0 R = m\sqrt{GMR}$.

b) Er zijn 2 behoudswetten, behoud van impulsmoment en behoud van mechanische energie. In de uiterste punten van de baan staat de snelheid loodrecht op de straal. Noem de snelheid hier v_1 en de afstand r_1. Impulsmomentbehoud $mv_0 R = 2mv_1 r_1$. Mechanische energiebehoud: $-3mMG/2R = \frac{1}{2}(2mv_1^2) - 2mMG/r_1$. Uit deze twee vergelijkingen kunnen we v_1 (en v_0) elimineren, dit leidt tot de kwadratische vergelijking $r_1^2 - \frac{4}{3}Rr_1 + \frac{1}{6}R_2 = 0$. Hieruit volgt voor de twee afstanden $r_{1,2} = \frac{2}{3}R \pm \frac{1}{6}R\sqrt{10}$.

c) De figuur mag natuurlijk gedraaid worden.



[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

Opgave 4: Schijf tussen twee veren *(30 punten)*

a) Bij een draaiing van de schijf om een hoek θ worden de veren een afstand $x = l\tan\theta \approx R\theta$ uitgerekt en ingedrukt. Bewegingsvergelijking voor de rotatie om een vaste as: $\tau = Id^2\theta/dt^2$. Het krachtmoment t.o.v. het centrum van de schijf is gelijk aan $\tau = -(k_1 + k_2)xR = -(k_1 + k_2)R^2\theta$. (Let op de richtingen). Invullen levert $\tau = -(k_1 + k_2)R^2\theta = \frac{1}{2}mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ of $\frac{d^2\theta}{dt^2} + (2(k_1 + k_2)/m)\theta = 0$. Dit is de standaard differentiaalvergelijking voor een harmonische beweging met $\omega = \sqrt{(2(k_1 + k_2)/m)}$.

b) $\omega = \sqrt{(2(k_1 + k_2)/m)}$

c) De algemene oplossing is $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Invullen van de randvoorwaarden, $t = 0$: $\theta = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ levert $\theta(t) = \frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)$.

d) Er is behoud van mechanische energie. Op tijdstip $t = 0$ zijn de veren ontspannen en beweegt alleen de schijf. $E = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_0^2$.