Julius Instituut
Universiteit Utrecht

EINDTOETS MECHANICA

Vrijdag 31 januari 2003, 14.00-17.00 uur

Ouderejaarsstudenten die merlb herkansen worden verzocht dit op het eerste blad aan te geven.

Het tentamen is vrij uitgebreid, maar bevat geen lange berekeningen. Hoewel de meeste onderdelen van de opgaven onafhankelijk van elkaar gemaakt kunnen worden kan het soms noodzakelijk zijn, als het niet lukt om een onderdeel te maken, om met een aanname verder te gaan. Geef altijd de methode aan.

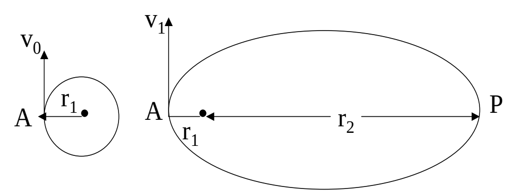
Opgave 1: Een schip door water (25 punten)
Van een schip met massa m dat een snelheid v_0 heeft worden op het tijdstip $t = 0$ de motoren uitgezet. Neem aan dat de wrijvingskracht F die het schip ondervindt evenredig is met de snelheid v van het schip, oftewel $F = -bv$, waarin b een positieve constante is.

a) Bepaal de snelheid van het schip als functie van de tijd, vanaf het moment dat de motoren af worden gezet.

b) Geef een uitdrukking voor de afstand die het schip nog aflegt nadat de motoren zijn uitgezet.

c) Voordat de motoren werden uitgezet, leverden ze een vermogen van 36 MW. Het schip voer toen met een snelheid van 36 km/uur. Verder is gegeven dat de massa van het schip 36.000 ton is. Bepaal de constante b en de afstand die het schip nog aflegt.

Opgave 2: Satelliet naar de zon (25 punten)
Er zijn verschillende manieren om een satelliet van de aarde naar de zon te sturen. Uitgaande van een vrijwel cirkelvormige baan met straal r_1 van aarde en satelliet om de zon lijkt de eenvoudigste manier het afremmen van de baansnelheid tot stilstand, waarna de satelliet in een rechte lijn naar de zon zal vallen. Een goedkopere manier, d.w.z. een die minder raketbrandstof kost, maakt gebruik van twee manoeuvres. Eerst wordt de satelliet naar de rand van het zonnestelsel gestuurd door de snelheid van de satelliet te vergroten! Vervolgens wordt in het verste punt van de nieuwe baan de satelliet afgeremd tot stilstand, waarna de satelliet weer in rechte lijn naar de zon valt. Verwaarloos bij de volgende vragen de beweging van de satelliet om de aarde en de gravitatiekracht van de aarde.

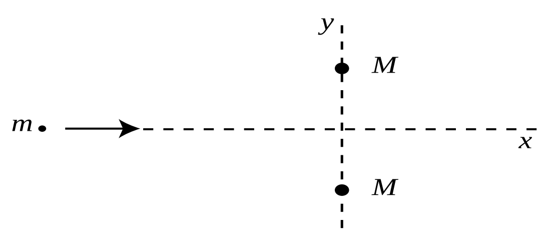


a) Bereken de snelheid v_0 van de satelliet in de cirkelbaan om de zon. Druk het antwoord uit in de straal r_1 de gravitatieconstante G en de massa M van de zon.

b) De snelheid van de satelliet wordt nu vergroot tot $v_1 = \alpha v_0$ met $\alpha > 1$, waardoor de satelliet een ellipsbaan gaat volgen en in P de maximale afstand $r_2 = 8r_1$ tot de zon bereikt. Bereken door gebruik te maken van behoudswetten de grootte van α en de snelheid van de satelliet in P. (Tijdens het vergroten van de snelheid verandert de afstand tot de zon niet).

c) In P wordt de snelheid tot nul afgeremd waarna de satelliet naar de zon valt. Maak kwantitatief duidelijk waarom deze manier van een satelliet naar de zon sturen voordeliger is dan het direct afremmen van de snelheid. (Als U de vorige vraag niet heeft kunnen uitrekenen neem dan aan dat $\alpha = 5/4$ en $v_P = \frac{1}{4}v_0$)

Opgave 3: Massa in goot (25 punten)
Een massa m kan zonder wrijving glijden door een gladde goot die geplaatst is langs de x-as van een rechthoekig coördinatenstelsel. Op de posities $x = 0$, $y = \pm a$ bevinden zich twee bolvormige massa's M die de massa m volgens de gravitatiewet aantrekken.



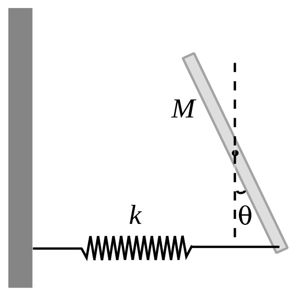
a) Bereken de potentiële energie van de massa m als functie van x. Noem de gravitatieconstante G.

b) Op een gegeven moment bevindt m zich op de positie $x = -3a$ en beweegt met snelheid v in de richting van de positieve x-as. Druk de snelheid van m op de positie $x = 0$ uit in de grootheden v, m, M, G en a. (geen mooie uitdrukking!)

c) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen, $x \ll a$, de massa m een harmonische trilling om de evenwichtsstand $x = 0$ gaat uitvoeren met een hoekfrequentie gelijk aan $\sqrt{2MG/a^3}$. (Hint: gebruik een Taylor-ontwikkeling).

Opgave 4: Een lat en een veer (25 punten)

Een dunne lat met massa M en lengte l kan wrijvingsloos draaien om een as door het middelpunt van de lat en loodrecht op de lat. Een horizontale massaloze veer met veerconstante k verbindt een uiteinde van de lat met een vast steunpunt. De staaf wordt gedraaid over een kleine hoek $\theta = \theta_0$ t.o.v. de verticaal, waardoor de veer uitrekt, en wordt vervolgens, ($t = 0$), losgelaten.



a) Laat zien dat de beweging van de lat beschreven wordt door de harmonische vergelijking $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$. Druk ω uit in gegeven grootheden. (Maak gebruik van de kleine hoekbenaderingen van $\sin\theta \approx \theta$ en $\cos\theta \approx 1$).

b) Geef de volledige oplossing van de beweging van de lat als functie van de tijd met de gegeven randvoorwaarden.

c) In een nieuwe situatie staat op $t = 0$ de staaf verticaal $\theta = 0$. Op dit moment wordt in het bovenste uiteinde van de lat een kogel met massa m met snelheid v horizontaal in de lat geschoten. Motiveer welke behoudswet er geldt. Bereken de hoeksnelheid $\omega_0 = d\theta/dt$ van de lat meteen na de botsing ($t = 0$). (Verwaarloos de massa van de kogel op het traagheidsmoment).

d) Geef de volledige oplossing van de beweging van de lat als functie van de tijd met de nieuwe randvoorwaarden.