Uitwerking Tussentoets MECHANICA 20-12-2006

Opgave 1: Wetten van Newton (40 punten)

a) Totale massa: 70 kg; gewicht: 700 N. Bevestigingspunt kan maximaal 500 N omhoog leveren. Er is een wrijvingskracht W tussen man en touw. Deze kracht werkt op de man omhoog en op het touw omlaag. W kan maximaal 400 N zijn, dus de netto kracht omlaag op de man is : $F = 200 = ma = 60a$; $a = 200/60 = 20/6$ m/s^2.
$v_0 = 0$; $s = 20$ (of 18); $s = \frac{1}{2}at^2$; $t^2 = \frac{2s}{a} = 40/(20/6) = 12$;
$v = at = 20/6\sqrt{12} = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11.5$ m/s;

b) $F(t) = F_0[1 - (t-T)^2/T^2] = m\frac{dv}{dt}$; $v_0 = 0$.
$\int_0^{2T}(1-(t-T)^2/T^2)dt = \int_{v_0}^{v_e}\frac{m}{F_0}dv$
$t - \frac{(t-T)^3}{3T^2}]_0^{2T} = \frac{m}{F_0}v_e$
$\frac{4}{3}T = \frac{m}{F_0}v_e$; $v_e = \frac{4}{3}\frac{F_0T}{m}$

c) $F = -b\mathrm{e}^{\alpha v} = m\frac{dv}{dt}$
$\int dt = -\int\frac{m}{b}\mathrm{e}^{-\alpha v}dv$
$t + C = \frac{m}{\alpha b}\mathrm{e}^{-\alpha v}$
$v(0) = v_0$; $C = \frac{m}{\alpha b}\mathrm{e}^{-\alpha v_0}$; $\frac{m}{\alpha b}\mathrm{e}^{-\alpha v} = t + \frac{m}{\alpha b}\mathrm{e}^{-\alpha v_0}$
$\mathrm{e}^{-\alpha v} = \frac{\alpha b}{m}t + \mathrm{e}^{-\alpha v_0}$
$-\alpha v = \ln(\frac{\alpha b}{m}t + \mathrm{e}^{-\alpha v_0})$
$v(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln(\frac{\alpha b}{m}t + \mathrm{e}^{-\alpha v_0})$

d) $F(x) = A/x^2 - B/x^3$
$U(x) = -\int F(x)dx = -\int(A/x^2 - B/x^3)dx = A/x - B/2x^2 + C$

Opgave 2: Blok op helling (30 punten)

a) $E_k(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$; $E_k(top) = 0$; $E_k(eind) = \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}v_0)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2$; $U(0) = 0$; $U(top) = mgh$
$E_k(0) - W = U(top)$; $U(top) - W = E_k(eind)$
$E_k(0) - E_k(eind) = \frac{3}{8}mv_0^2 = 2W$; $W = \frac{3}{16}mv_0^2$
$mgh = \frac{5}{16}mv_0^2$
$h = \frac{5v_0^2}{16g}$

b) $W = F_w \cdot s = F_w\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{3}{16}mv_0^2$
$F_w = \frac{\frac{3}{16}mv_0^2}{\frac{h}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{3}{16}mv_0^2\sin\alpha}{\frac{5v_0^2}{16g}} = \frac{3}{5}mg\sin\alpha$
$F_w = \mu_k N$; $N = mg\cos\alpha$
$\mu_k = \frac{F_w}{N} = \frac{\frac{3}{5}mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \frac{3}{5}\tan\alpha$

c) Vanaf het hoogste punt glijdt het blok blijkbaar weer terug, dus:
$F_w = \mu_s mg\cos\alpha < F_z(evenwijdig) = mg\sin\alpha$
$\mu_s < \tan\alpha$; $\tan\alpha = \frac{5}{3}\mu_k$; $\mu_s < \frac{5}{3}\mu_k$
Ook geldt $\mu_k < \mu_s$, dus $\mu_k < \mu_s < \frac{5}{3}\mu_k$

Opgave 3: Biljartbal (30 punten)

a) $I = \frac{2}{5}mR^2$
Het impulsmoment kan opgesplitst worden in het impulsmoment van het massamiddelpunt en het impulsmoment t.o.v. het massamiddelpunt. $L = mv_{cm}R + I_{cm}\omega = mv_{cm}R + \frac{2}{5}mR^2\omega$

b) Slipvrij: $\omega = v_{cm}/R$.

Een mogelijke lijn van oplossing is door uit te gaan van het punt C en toe te passen $\tau = dL/dt$: $F\Delta t = dp = p_2 - p_1 = mv_{cm}$ (want $p_1 = 0$)
$F\Delta th = dL = L_2 - L_1 = mv_{cm}R + \frac{2}{5}mR^2\omega = mv_{cm}R + \frac{2}{5}mR^2 v_{cm}/R = \frac{7}{5}mv_{cm}R$
$h = \frac{\frac{7}{5}mv_{cm}R}{F\Delta t} = \frac{\frac{7}{5}mv_{cm}R}{mv_{cm}} = \frac{7}{5}R.$

Sneller kan het door een punt te kiezen op de horizontale lijn in de richting van de stoot, het externe moment is dan nul en dus ook de verandering van het impulsmoment: $m(h - R)v_{cm} = I_{cm}\omega = \frac{2}{5}mv_{cm}R$ (let op de tekens) waaruit volgt $h = \frac{7}{5}R$.

c) $E_k = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2v_{cm}^2/R^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{5}mv_{cm}^2 = \frac{7}{10}mv_{cm}^2$
$F\Delta t = mv_{cm}$; $v_{cm} = \frac{F\Delta t}{m}$
$E_k = \frac{7}{10}mv_{cm}^2 = \frac{7}{10}m(\frac{F\Delta t}{m})^2 = \frac{7}{10}\frac{(F\Delta t)^2}{m}$

Errata uitwerking tussentoets Mechanica dd. 20-12-2006

In de uitwerking van de tussentoets van Mechanica, gegeven op 20 december 2006, zit een fout bij vraag 1b. Er staat: $F(t) = F_0[1 - ((t - T)^2)/T^2]$.

Dit moet zijn: $F[t] = F_0[t - (t - T)^2]/T^2$.