Uitwerking tentamen Mechanica

Woensdag 18 december 2002

Opgave 1: Kogelslingeren. (20 punten)

a) **Voor een kogelbaan geldt dat de horizontale verplaatsing (de afstand van de worp), gelijk is aan** $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. **De spankracht in de armen is gelijk aan** $T = mv_0^2/l = \frac{mgs}{l \sin 2\alpha}$. **Invullen:** $T \approx 3000$ **N.**

b) **Voor een kleine verandering in de hoek geldt dat** $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0$ **voor** $\alpha = 45°$. **De afstand verandert niet bij kleine veranderingen in de lanceerhoek. Dus richten op snelheid!**

Opgave 2: Variabele wrijvingskracht (25 punten)

a) **De wrijvingskracht** W **is gelijk** $W = fN$, **waarin** N **de normaalkracht op de ring. Deze is gelijk aan** $N = mv^2/l$, **dus** $W = fmv^2/l$.

b) **Tweede wet van Newton:** $-W = m\frac{dv}{dt}$, **dit leidt tot de differentiaalvergelijking** $\frac{dv}{dt} = -fv^2/l$. **Scheiden van de variabelen:** $-\frac{dv}{v^2} = \frac{f}{l}dt$. **Integreren met randvoorwaarde** $t = 0, v = v_0$: $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{ft}{l}$, **herschrijven** $v = v_0\frac{1}{1+v_0\frac{f}{l}t}$.

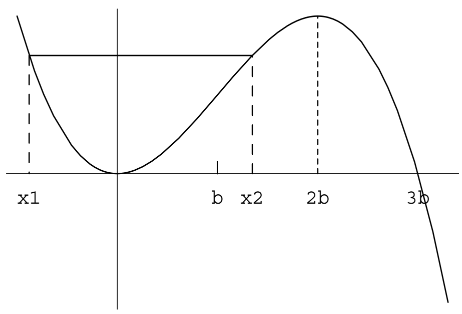
c) $v = \frac{1}{2}v_0$ **als** $t = \frac{l}{v_0 f}$. **De afgelegde weg is gelijk aan** $s = \int_0^t v(t)dt = \frac{l}{f}\ln(1 + \frac{v_0 f}{l}t)\Big|_0^{\frac{l}{v_0 f}} = \frac{l}{f}\ln 2$.

Opgave 3: Realistische veer (25 punten)

a) $U(x) - U(x = 0) = U(x) = -\int_0^x F(x)dx = \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{3}k_2x^3$

b) $U(-b) = 2U(b)$. **Invullen** $k_2 = \frac{k_1}{2b}$.

c) $U(x) = \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{6}\frac{k_1}{b}x^3$.



d) **Er geldt behoud van mechanische energie** $K(0) + U(0) = K(b) + U(b)$. $k_1b^2/2 + 0 = K(b) + k_1b^2/3$, $K(b) = k_1b^2/6$, $v(b) = b\sqrt{k_1/3m}$.

e) **Uiterste waarde:** $K = 0$, **dit resulteert in een derdegraadsvergelijking. Alleen de twee oplossingen** x_1 **en** x_2 **voldoen (zie tekening).**

Opgave 4: Roterende driehoek (30 punten)

a) **Traagheidsmoment t.o.v. massamiddelpunt van een lat is gelijk aan** $I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$**. Draaias door P: drie keer het parallelle assen theorema (Steiner) toepassen.**$I_p = 3I_{cm} + \frac{1}{4}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 + m(\frac{1}{2}L\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}mL^2$**.**

b) **De botsing is inelastisch, er is dus geen behoud van mechanische energie.**

Er werken externe krachten in het draaipunt P**, dus is er geen behoud van impuls.**

De externe krachten "gaan" door het punt P**, dus is het moment t.o.v.** P **gelijk aan nul. Er is behoud van impulsmoment t.o.v.** P**. (De kogel en de driehoek oefenen ook krachten op elkaar uit maar deze zijn tegengesteld en aan elkaar gelijk).**

c) **Impulsmoment voor = Impulsmoment na de botsing.** $\frac{1}{2}MvL = I'_P\omega_P$**,** $I'_P = \frac{3}{2}mL^2 + ML^2 = (\frac{3}{2}m + M)L^2$**.** $\omega_P = \frac{Mv}{(3m+2M)L}$**.**

d) **De snelheid van de kogel na afloop van de botsing is** $v = \omega_P L$**, tangentieel aan een cirkel met** P **als centrum en straal** L**. De stoot** $\int \overrightarrow{\mathbf{F}} dt$ **is gelijk aan de impulsverandering** $d\overrightarrow{\mathbf{p}}$ **van de kogel. Ontbind de snelheid na de botsing in horizontale en verticale richting. Verticaal:** $\int F_y dt = d(Mv_y) = M\omega_P L \cos 6o^\circ - Mv = -\frac{6m+3M}{6m+4M}Mv$**. Horizontaal:**$\int F_x dt = d(Mv_x) = -M\omega_P L \sin 6o^\circ - 0 = -\frac{M\sqrt{3}}{6m+4M}Mv$**.**