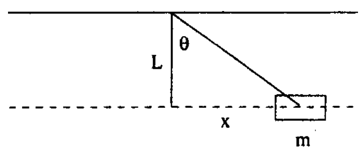
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-105B werd in 2006/2007 gegeven door Dhr. A. Arts.

Mechanica (NS-105B)
2 februari 2007

Opgave 1: een bijzondere slinger *(35 punten)*

We hebben een slinger waarvan we de slingerlengte zodanig variëren dat de massa, m, aan het uiteinde langs een horizontale lijn (x-as) gaat bewegen. Dit kunnen we realiseren door tijdens een normale slingerbewiging het koord in te trekken of te laten vieren. In de evenwichtsstand is de lengte van het koord L, de massa van het koord verwaarlozen we en de valverasnelling g.



a) Geef en teken voor de situatie dat de horizontale uitwijking vanuit de evenwichtsstand gelijk is aan x, de krachten die op de massa werken. Bereken de kracht in de horizontale x-richting en druk deze uit in de grootheden g, L, m en x. Maak GEEN benaderingen voor kleine hoeken.

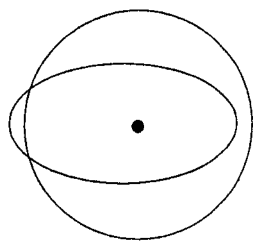
b) Bereken de verrichte arbeid als we de massa verplaatscn van x naar $x + \Delta x$ en vervolgens de verrichte arbeid bij de beweging van $x = 0$ naar $x = a$.

c) Stel de bewegingsvergelijking voor de massa m op en geef de oplossing voor de randvoorwaarden $t = 0$: $x = a$ en $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$.

d) Geldt hier de wet van behoud van mechanische energie? Geef een toelichting, het simpele antwoord ja of nee levert geen punten op, beide antwoorden kunnen, afhankelijk van de toelichting, zowel goed als fout zijn.

Opgave 2: Satelliet om de aarde *(30 punten)*

In de figuur staan twee satellietbanen om de aarde getekend: een cirkelbaan en een ellipsbaan. Beide banen hebben dezelfde lange as (diameter) en daardoor dezelfde totale mechanische energie. De straal van de cirkelbaan is R, de massa van de aarde is M, de massa van de satelliet is m en de gravitatieconstante is G.



a) Bereken de mechanische energie van de satelliet in de cirkelbaan. Druk het antwoord uit in de grootheden G, M, m, en R.

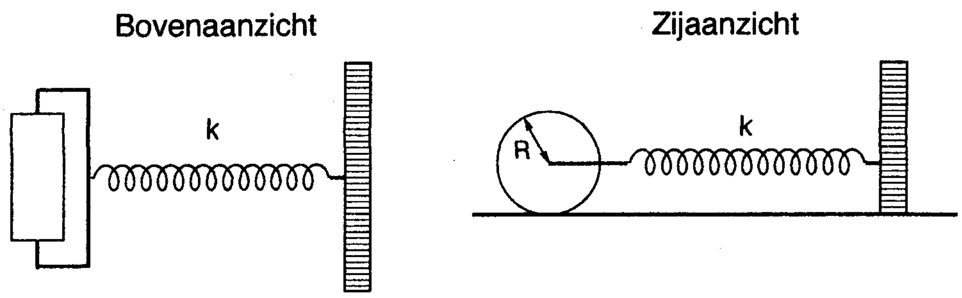
b) Beredeneer welke van de twee banen het grootste impulsmoment heeft. (Hint: beschouw de snijpunten).

c) Gegeven is dat in het snijpunt de raaklijnen aan de cirkel en de ellips een hoek van 60 graden maken. We willen in een van de snijpunten de satelliet van de ellipsbaan overbrengen naar de cirkelbaan. Dit kan door het afvuren van stuurraketten of het uitstoten van gas. Bereken de grootte en richting van de extra snelheid die we de satteliet moeten geven om dit te realiseren. Neem hierbij aan dat afvuren kort duurt en het massaverlies verwaarloosbaar is.

Opgave 3: Oscillerende cilinder *(35 punten)*

Beschouw een homogene cilinder met massa M en straal R. De beide uiteinden van de cilinder zijn aan een massaloze U-vormige beugel bevestigd, zodanig dat de cilinder in de beugel wrijvingsloos om zijn cilinderas kan draaien. Het midden van de U-vormige beugel wordt bevestigd aan het uiteinde

van een massaloze veer met veerconstante k. Het andere uiteinde van de veer wordt aan een muur bevestigd.
De cilinder bevindt zich op een horizontaal vlak, zodanig dat deze in rust is en de veer zich in horizontale positie tussen de beugel en de muur bevindt. De veer ligt langs de x-as. In deze evenwichtspositie bevindt het zwaartepunt van de cilinder zich op de positie $x = 0$.
Door nu de cilinder een uitwiking in de x-richting te geven en vervolgens los te laten, gaat deze slipvrij over het horizontale vlak rollen en het system vertoont een eendimensionale harmonische oscillatie in de x-richting. Tijdens de beweging blijft de veer in goede benadering horizontaal.
Een schets van de situatie is hieronder weergegeven.



a) Geef een uitdrukking voro de totale potentiële energie van het systeem als het zwaartepunt van de cilinder een uitwijking x heeft.

b) Geef een uitdrukking voor de totale kinetische energie van het systeem als het zwaartepunt van de cilinder een snelheid v heeft.

c) Onder welke voorwaarde geldt er behoud van mechanische energie voor het gehele systeem? Betrek eventuele wrijvingskrachten in uw antwoord.

d) Leid de bewegingsvergelijking af uit het behoud van mechanische energie.

e) Bepaal de hoefrequentie ω van de harmonische oscillatie.

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = -\mathrm{grad}\, U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1' + \vec{\mathbf{p}}_2'$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \ldots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment