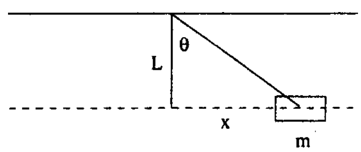
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-105B werd in 2006/2007 gegeven door Dhr. A. Arts.

Uitwerking[1] Mechanica (NS-105B)
2 februari 2007

Opgave 1: een bijzondere slinger *(35 punten)*

We hebben een slinger waarvan we de slingerlengte zodanig variëren dat de massa, m, aan het uiteinde langs een horizontale lijn (x-as) gaat bewegen. Dit kunnen we realiseren door tijdens een normale slingerbeweging het koord in te trekken of te laten vieren. In de evenwichtsstand is de lengte van het koord L, de massa van het koord verwaarlozen we en de valverasnelling g.



a) Op de massa werken twee krachten, de zwaartekracht (mg) verticaal omlaag en de spankracht (T) in het koord. In de verticale richting geldt $T\cos\theta = mg$ (geen versnelling) en in horizontale richting $-T\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

   Elimineren van T levert $-mg\tan\theta = -\frac{mg}{L}x = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

b) Arbeid $F_x\Delta x = -\frac{mg}{L}x\Delta x$, totale arbeid $W = -\int_0^a \frac{mg}{L}x\mathrm{d}x = -\frac{mg}{2L}a^2$.

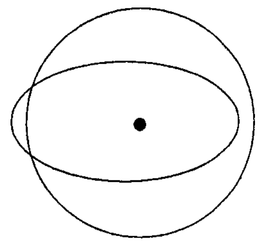
c) Bewegingsvergelijking: $-\frac{g}{L}x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, met gegeven randvoorwaarden. Dit is een harmonische vergelijking met als oplossing $x(t) = A\cos\left(\sqrt{g/L}t + \phi\right)$, A en ϕ volgen uit de randvoorwaarden, $A = a$ en $\phi = 0$.

d) Ja, wet van behoud van mechanische energie geldt als we het gehele systeem beschouwen van koord en massa inclusief het mechanisme dat het touw intrekt en laat vieren. De arbied verricht door het mechanisme moet meegenomen worden in de energiebeschouwing.

   Nee, als we alleen naar de massa kijken (en de zwaartekracht) dan is er geen behoud van mechanische energie, de potentiële energie van de zwaartekracht blijft constant.

Opgave 2: Satelliet om de aarde *(30 punten)*

In de figuur staan twee satellietbanen om de aarde getekend: een cirkelbaan en een ellipsbaan. Beide banen hebben dezelfde lange as (diameter) en daardoor dezelfde totale mechanische energie. De straal van de cirkelbaan is R, de massa van de aarde is M, de massa van de satelliet is m en de gravitatieconstante is G.



a) Mechanisch eenergie van de satelliet in de cirkelbaan: $U = -MGm/R + \frac{1}{2}mv^2$, verder geldt $\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$, zodat $U = -\frac{GMm}{2R}$. (Dit antwoord kan ook meteen gegeven worden me tbehulp van de algemene vergelijking voor een ellipsbaan $U = -\frac{GMm}{2a}$, met $2a$ de lange as.)

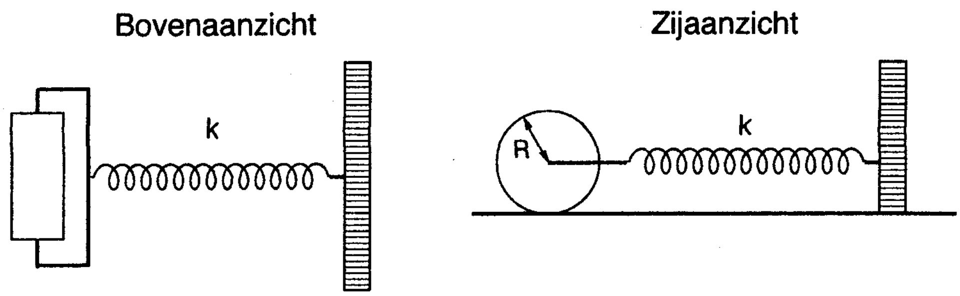
b) Beredeneer welke van de twee banen het grootste impulsmoment heeft. In de snijpunten is de afstand tot de aarde voor beide banen gelijk, du sheeft de satteliet hier dezelfde potentiële en kinetische energie! De snelheiden zijn dus in grootte gelijk. Het impulsmoment is gedefinieerd als het utiproduct van plaatsvector en snelheidsvector (maal de massa). In de cirkelbaan staat de snelheid loodrecht op de straal en is het impulsmoment dus het grootst.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

c) Gegeven is dat in het snijpunt de raaklijnen aan de cirkel en de ellips een hoek van 60 graden maken. We willen in een van de snijpunten de satteliet van de elipsbaan overbrengen naar de cirkelbaan. De snelheden in de ellips en de cirkel zijn gelijk (v) en maken een hoek van 60 graden met elkaar. We moeten de satelliet een extra snelheid $\vec{u}$ geven zodat $\vec{v}_{cirkel} - \vec{v}_{ellips} = \vec{u}$, deze drie vectoren vormen een gelijkzijdige driehoek. Dus moeten we de satelliet een extra snelheid v geven onder een hoek van 120 graden met de raaklijn aan de ellipsbaan.

Opgave 3: Oscillerende cilinder *(35 punten)*

Beschouw een homogene cilinder met massa M en straal R. Een schets van de situatie is hieronder weergegeven.



a) $U_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$.

b) $U_{kin} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. $I = \frac{1}{2}MR^2$, ω is de hoeksnelheid van de cilinder.

c) Leid de bewegingsvergelijking af uit het behoud van mechanische energie. $U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \text{constant}$; $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0$, met $v = \omega R$, dus $kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Iv|dervt/R^2 = 0$, omdat $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ kunnen we dit vereenvoudigen tot $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{3M}x = 0$ en dit is de vergelijking voor de harmonische oscillator.

d) De hoekfreqentie ω i sgelijk aan $\sqrt{\frac{2k}{3M}}$.