1e deeltoets TF1
3 november 2008
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen.
Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam.

Opgave 1 bestaat uit 6 onderdelen (a) t/m (f).
Opgave 2, 3, en 4 bestaan elk uit 5 onderdelen (a) t/m (e).

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we soms de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN ~ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1
We beschouwen een enkel deeltje dat zich in 2 microtoestanden kan bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie ϵ_0 ofwel in de aangeslagen toestand met energie ϵ_1, dus $\epsilon_1 > \epsilon_0$. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Wat is dan de kans dat het deeltje in de aangeslagen toestand zit?

(b) Bereken de gemiddelde energie van dit deeltje.

(c) Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw resultaat bij onderdeel (b)) de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

(d) Als nu gegeven is dat $\epsilon_1 - \epsilon_0 = 1$ eV (dit is een typische waarde voor atomaire energie verschillen), zit het deeltje dan bij kamertemperatuur in essentie in de hoge-T of lage-T limiet? Beargumenteer uw antwoord.

We beschouwen nu $N \gg 1$ van zulke deeltjes, maar nu thermisch geïsoleerd van het warmtebad zodat de totale energie van het systeem vast is en gelijk aan $U = (N - n)\epsilon_0 + n\epsilon_1$ voor gegeven n.

(e) Bereken eerst de multipliciteit, en hieruit de entropie m.b.v. de Stirling benadering.

(f) Bereken de temperatuur van dit afgesloten systeem.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

(a) Een uitvinder heeft een motor ontwikkeld die 2/3 van de energie van de verbruikte brandstof omzet in (nuttig) vermogen, terwijl 1/3 als restwarmte wordt gedumpt in de buitenlucht op temperatuur $T_1 = 300$K. Bereken de temperatuur T_2 die de verbrandingskamer minstens moet hebben.

(b) Bereken de typische afstand tussen naburige gasdeeltjes in een klassiek ideaal gas op kamertemperatuur onder atmosferische druk. Hoeveel maal groter is deze afstand dan de typische diameter van een atoom?

(c) Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{1}$$

waarbij S de entropie, p de druk, T de temperatuur, en V het volume is van een of ander thermodynamisch systeem.

(d) Bereken, uitgaande van de eerste hoofdwet, de differentiaal dF van de Helmholtz vrije energie (of de Helmholtz functie) $F(V,T)$ van een thermodynamisch systeem met volume V en temperatuur T. Het aantal deeltjes mag u hier vast veronderstellen.

(e) Geef de Legendre transformatie die uitgevoerd moet worden op $F(V,T)$ (zie (d)) om de onafhankelijke variabelen V en T om te zetten in p en T.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes. Het gas wordt langzaam (reversibel) gecomprimeerd van het begin-volume V_0 naar het eind-volume $V_1 = V_0/3$. De begin-temperatuur T_0 is bekend, en dus ook de begin-energie $E_0 = 3Nk_BT_0/2$. De (nog onbekende) eind-energie noemen we E_1. Het aantal deeltjes verandert niet.

(a) Geef een uitdrukking voor de druk p_0 in de begin-toestand.

(b) Relateer met behulp van de Eerste Hoofdwet de energieverandering van het gas $\Delta E = E_1 - E_0$ aan de *toegevoerde* warmte Q en de *op* het gas geleverde arbeid W gedurende de compressie.

(c) Bereken W voor het geval dat de compressie onder isobare omstandigheden verloopt.

(d) Bereken Q, W, en E_1 voor het geval dat de compressie isotherm verloopt.

(e) Laat voor het geval dat de compressie adiabatisch verloopt eerst zien dat gedurende dit proces de druk p en het volume V steeds zodanig zijn $p = cV^{-5/3}$ met c een constante, en bereken vervolgens Q, W, en E_1.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.
Een klassiek deeltje met massa m is in thermisch evenwicht met een gas op temperatuur T. Het deeltje zit vast aan een harmonische ("Hookse") veer en kan daarom alleen bewegen op een horizontale 1-dimensionale lijn $-\infty < x < \infty$. De positie van het deeltje is $x = 0$ als de veer in evenwicht is, maar door thermische beweging kan het deeltje de veer indrukken en uitrekken. Noemen we de nog onbekende veerconstante C, dan heeft het deeltje op positie x dus een potentiële energie $V(x) = \frac{1}{2}Cx^2$. De positie x van dit deeltje wordt nu vele malen gemeten, en blijkt Gaussisch verdeeld te zijn met een standaard deviatie σ gecentreerd rond $x = 0$; dus σ is bekend.

(a) Geef de correct genormeerde Gaussische verdeling $W(x)$ van het deeltje, dus gecentreerd rond $x = 0$ en met standaard deviatie σ.

(b) Bereken C als functie van m, σ, k_B, en/of T.

Hetzelfde deeltje wordt nu losgemaakt van de veer en kan dus vrij door het gas bewegen, maar is nu wel onderhavig aan het Aardse gravitatieveld zodat het op hoogte z een potentiële energie mgz heeft met g de gravitatie versnelling.

(c) Geef de kansverdeling $P(z)$ om het deeltje op hoogte z boven de bodem aan te treffen, waarbij u mag aannemen dat het deeltje zo zwaar is dat het nooit het "plafond" raakt.

(d) Bereken, of schat op basis van fysische argumenten als u geen antwoord hebt bij (c), de gemiddelde hoogte $\langle z \rangle$ van het deeltje.

(e) We beschouwen nu N van zulke deeltjes, waarbij u mag aannemen dat de deeltjes elkaar niet beïnvloeden. De variantie $\langle z_i^2 \rangle - \langle z_i \rangle^2$ van de hoogte z_i van het i-deeltje veronderstellen we als bekend en noemen we δ^2. Wat is de standaard deviatie van de gemiddelde hoogte $Z = (1/N)\sum_{i=1}^{N} z_i$ van deze N deeltjes.

EINDE