Eindtentamen TF1
26 januari 2009
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen.
Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam.

Alle vier de opgaven bestaan uit 5 onderdelen (a) t/m (e).

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we soms de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN ~ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1

We beschouwen N niet-wisselwerkende spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes vastgeprikt op een rooster. Als we met $s_i = \pm 1$ aanduiden dat de i-de spin up $(+1)$ of down (-1) staat, dan schrijven we de energie E van een microtoestand en de kanonieke partitiesom $Z(N,T)$ als

$$\begin{aligned} E(s_1, s_2, \cdots, s_N) &= -\epsilon(s_1 + s_2 + \cdots + s_N); \\ Z(N,T) &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \exp[-\beta E(s_1, s_2, \cdots, s_N)], \end{aligned}$$

met $\epsilon > 0$ de energie van een spin-down deeltje, en T de temperatuur.

(a) Laat zien dat we kunnen schrijven $Z(N,T) = (Z_1(T))^N$, en bereken de een-deeltjes partitiesom $Z_1(T)$.

(b) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(N,T)$, en de gemiddelde energie per deeltje $u(T) = \langle E \rangle / N$.

(c) Bereken $u(T \downarrow 0)$ en $u(T \to \infty)$ m.b.v. (b) of d.m.v. fysische argumenten. Geef de typische cross-over temperatuur T^* tussen hoge-T en lage-T gedrag, schets vervolgens $u(T)$ voor $T \in (0, \infty)$, en geef hierin T^* aan op de T-as en $+\epsilon$ of $-\epsilon$ op de u-as.

Het systeem wordt nu bij dezelfde N thermisch geïsoleerd, zodat de totale energie een vaste waarde U aanneemt.

(e) Bereken het aantal spin-up deeltjes N_+ en de entropie S m.b.v. de Stirling benadering.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

(a) Sommige virusdeeltjes kunnen worden beschouwd als harde (nimmer-overlappende) naaldvormige deeltjes met lengte L en diameter D, z.d.d. $L \gg D$. Bereken het uitgesloten volume ("excluded volume") van twee van zulke naaldjes, voor de gevallen dat de onderlinge orientaties van de twee staafjes (i) parallel zijn, en (ii) loodrecht zijn. Het gaat hier slechts om de afhankelijkheid van L en D; geometrische factoren zoals 2 of π doen er hier niet toe.

(b) Maak een schetsje van ongeveer 10-20 colloïdale staafjes (getekend als streepjes) in (i) de isotrope fase en (ii) de nematische fase. Beredeneer welke van de twee fasen de hoogste concentratie heeft.

(c) Bereken of geef de typische afstand tussen naburige gasdeeltjes in een klassiek ideaal gas op kamertemperatuur onder atmosferische druk. Is deze afstand veel groter of veel kleiner dan de thermische golflengte, of ongeveer even groot?

(d) Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \tag{1}$$

waarbij S de entropie, p de druk, T de temperatuur, en V het volume is van een of ander thermodynamisch systeem met een vast aantal deeltjes.

(e) Een bolletje stuifmeel vertoont Brownse beweging in een oplosmiddel, zodanig dat de positie $x(t)$ op de x-as in de tijd t (in seconden) varieert. De verplaatsing gedurende 1 seconde, $x(t+1) - x(t)$, wordt vele malen gemeten en blijkt Gaussisch verdeeld te zijn met gemiddelde nul en standaard deviatie σ. Wat is dan het gemiddelde en de standaard deviatie van de verplaatsing $x(t+100) - x(t)$ gedurende 100 seconden?

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een mono-atomair klassiek ideaal gas van N identieke polariseerbare deeltjes in een 3-dimensionaal vat van volume V op temperatuur T. In dit vat is een homogeen electrisch veld aangelegd, zodanig dat elk gasdeeltje (door polarisatie) een potentiële energie $\epsilon > 0$ heeft, ongeacht de positie van het deeltje in het vat. De kinetische energie van een enkel deeltje met impuls $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ is $\mathbf{p}^2/2m$ met m de deeltjes massa, dus de 1-deeltjes partitiesom $Z_1(V,T)$ luidt

$$Z_1(V,T) = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \exp\left[-\frac{\mathbf{p}^2}{2mk_BT}\right],$$

met h de constante van Planck. De Helmholtz vrije energie van het gas kan worden geschreven als

$$F(N,V,T) = N\left(\epsilon + k_BT\left[-1 + \ln\frac{N\Lambda^3}{V}\right]\right),$$

met Λ de thermische golflengte van de deeltjes.

(a) Bereken de gemiddelde energie $U(N,V,T)$ van het gas in het vat, bijv. m.b.v. uw ideale-gas of equipartitie kennis, of anders door Λ eerst expliciet uit te rekenen.

(b) Bereken de druk $P(N,V,T)$ van het gas in het vat.

(c) Bereken de chemische potentiaal $\mu(N,V,T)$ van het gas in het vat. Is μ intensief of extensief?

We veronderstellen nu dat het vat lek is, zodanig dat het vat gasdeeltjes kan uitwisselen met een zeer groot reservoir van hetzelfde (ideale) gas op temperatuur T (zoals in het vat) met gasdruk P_r. Het electrisch veld in het vat blijft bestaan, maar in het reservoir heerst géén electrisch veld, dus is de chemische potentiaal μ_r in het reservoir gelijk aan $\mu_r = k_BT\ln(P_r\Lambda^3/k_BT)$. Het aantal deeltjes in het vat is niet langer gegeven door de vaste N, maar fluctueert rondom een nader te bepalen gemiddelde $\langle N\rangle$.

(d) Welke conditie bepaalt het diffusief (of chemisch) evenwicht tussen het reservoir en het lekke vat met daarin het electrisch veld?

(e) Bereken de evenwichtsdichtheid van gasdeeltjes $\langle N\rangle/V$ in het vat met het electrisch veld als functie van P_r, T, ϵ. Is $\langle N\rangle/V$ groter of kleiner dan de gasdichtheid in het reservoir, of even groot? Beargumenteer uw antwoord kort.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een klassiek systeem van N deeltjes in een volume V bij temperatuur T. De druk voldoet aan $p = Nk_BT/(V - Nb)$ met $b > 0$ een constante.

(a) Geef een mogelijke fysische betekenis van b, en beredeneer dat V voor vaste N niet kleiner kan zijn dan een of ander minimum volume V_m. Bereken V_m.

(b) Bereken de op het gas geleverde arbeid W wanneer het isothermisch wordt gecomprimeerd van een beginvolume V_1 naar een eindvolume $V_2 < V_1$. Geef aan of W positief, negatief, of nul is; neem uiteraard aan dat $V_2 > V_m$.

(c) Als het gas isobarisch gecomprimeerd wordt van een beginvolume V_1 en begintemperatuur T_1 naar een eindvolume $V_2 < V_1$, bereken dan de op het gas geleverde arbeid W en de eindtemperatuur T_2.

We beschouwen nu een ander systeem, waarvan de druk gegeven wordt door
$p = Nk_BT/(V - Nb) - aN^2/V^2$, met $a > 0$ een constante. We noemen $N/V = \rho$ de dichtheid.

(d) Dit systeem heeft een kritieke temperatuur T_c en een kritieke dichtheid ρ_c. Als nu gegeven is dat $\rho_c = 1/(3b)$, bereken dan T_c.

(e) Beschrijf kort hoe het systeem zich gedraagt bij een isotherme compressie van zeer verdund ($\rho \ll \rho_c$) tot ρ_c, voor het geval dat (i) $T \gg T_c$, (ii) $T = T_c$, en (iii) $T \ll T_c$.

EINDE