

1e deeltoets TF1  
2 november 2009  
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.  
Met elke opgave zijn 20 punten te verdienen.  
Begin bij elke opgave op een **nieuw en los** vel papier met daarop uw naam.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met  $T$ , en de constante van Boltzmann met  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ . Ook gebruiken we soms de afkorting  $\beta = 1/(k_B T)$ . Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ , het getal van Avogadro aan  $N_A = 6 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ , en de gas constante aan  $R = 8.31 \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Zoals u wel weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan  $10^5 \text{Pa}$ .

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE  
PAGINA. GEBRUIK PER OPGAVE EEN NIEUW & LOS VEL  
PAPIER.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE  
HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN  
GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN  
AFSCHATTING VAN  $\sim 1$  SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN  
GROOTTE.

### Opgave 1

We beschouwen een enkel deeltje dat zich in 2 microtoestanden kan bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie  $-\epsilon/2$  ofwel in de aangeslagen toestand met energie  $+\epsilon/2$ , met  $\epsilon > 0$ . Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur  $T$ .

- Wat is de kans dat het deeltje in de grondtoestand toestand zit?
- Bereken de gemiddelde energie  $u(T)$  van dit deeltje.
- Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw resultaat bij onderdeel (b)) de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge- $T$  en (ii) de lage- $T$  limiet.
- De overgangstemperatuur tussen hoge- $T$  en lage- $T$  gedrag noemen we  $T^*$ . Geef een schatting voor  $T^*$ , en geef aan welke  $T$ -afhankelijke fysische grootte maximaal is bij  $T = T^*$ .
- Als nu gegeven is dat  $\epsilon = 1$  meV, zit het deeltje dan bij kamertemperatuur in essentie in de hoge- $T$  of lage- $T$  limiet? Beargumenteer uw antwoord.

### Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een oppervlak waarop identieke atomen kunnen adsorberen. Er zijn  $N$  mogelijke adsorptie posities op dit oppervlak, en op elk daarvan kan maximaal 1 atoom adsorberen. Een geadsorbeerd atoom is aan het oppervlak gebonden met een (negatieve) energie  $-\epsilon$  (dus  $\epsilon > 0$ ). De adsorptie-posities zitten zo ver van elkaar dat ze elkaar niet beïnvloeden.

- Geef de multipliciteit van dit systeem voor het geval dat er  $n$  atomen zijn geadsorbeerd (dus met  $0 \leq n \leq N$ ).
- Bereken de entropie van de macrotoestand met  $n$  geadsorbeerde atomen. Vereenvoudig uw uitdrukkingen door aan te nemen dat zowel  $N \gg 1$  als  $n \gg 1$ .
- Als de temperatuur van het systeem  $T$  is, bereken dan het gemiddeld aantal geadsorbeerde atomen  $\langle n \rangle$ .
- Bereken tevens de standaard deviatie  $\sigma$  in het aantal geadsorbeerde atomen bij temperatuur  $T$ .

### Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een klassiek ideaal gas van  $N$  puntdeeltjes. Het gas wordt langzaam (reversibel) geëxpandeerd van het begin-volume  $V_1$  naar het eind-volume  $V_2 = 4V_1$ . De begin-temperatuur  $T_1$  is bekend, en dus ook de begin-energie  $E_1 = 3Nk_B T_1/2$ . De (nog onbekende) eind-energie noemen we  $E_2$ . Het aantal deeltjes verandert niet.

- Relateer met behulp van de Eerste Hoofdwet de energieverandering van het gas  $\Delta E = E_2 - E_1$  aan de toegevoerde warmte  $Q$  en de op het gas geleverde arbeid  $W$  gedurende de expansie.
- Bereken  $W$  voor het geval dat de expansie onder isobare omstandigheden verloopt.
- Bereken  $Q$ ,  $W$ , en  $E_2$  voor het geval dat de expansie isotherm verloopt.
- Bereken  $Q$  voor een adiabatische expansie.
- Indien de expansie van de begin- naar de eind-toestand van onderdeel (d) irreversibel i.p.v. reversibel geweest zou zijn, zou dan de toegevoerde warmte groter of kleiner zijn geweest, of even groot?

**Opgave 4** —begin op een nieuw vel s.v.p.

- (a) Beschouw een motor die  $3/4$  van de energie van de verbruikte brandstof omzet in (nuttig) vermogen, terwijl  $1/4$  als restwarmte wordt gedumpt in de buitenlucht op temperatuur  $T_1 = 300\text{K}$ . Bereken de temperatuur  $T_2$  die de verbrandingskamer minstens moet hebben.
- (b) Bereken het aantal mol gas-deeltjes in 1 liter klassiek ideaal gas op kamertemperatuur onder atmosferische druk. Schat tevens het aantal watermoleculen in een liter vloeibaar water.
- (c) Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad (1)$$

waarbij  $S$  de entropie,  $p$  de druk,  $T$  de temperatuur, en  $V$  het volume is van een of ander thermodynamisch systeem.

- (d) Bereken, uitgaande van de eerste hoofdwet, de differentiaal  $dH$  van de enthalpie van een thermodynamisch systeem met volume  $V$ , druk  $p$ , entropie  $S$ , en temperatuur  $T$ . Het aantal deeltjes mag u hier vast veronderstellen.
- (e) Als de Helmholtz vrije energie van een zeker thermodynamisch systeem gegeven wordt door  $F(T, V) = -VT^2/4$ , bereken dan de energie  $U(S, V)$  m.b.v een Legendre transformatie. De notatie is standaard, zoals bijv. in (d), en het deeltjes aantal is vast verondersteld.

**Opgave 5** —begin op een nieuw vel s.v.p.

De snelheids-component  $v_x$  van een gas-deeltje in de  $x$ -richting wordt vele malen gemeten. De kansverdeling voor  $v_x$  blijkt te voldoen aan

$$f(v_x) \propto \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right),$$

met  $m$  de massa van een gas deeltje en  $T$  de gas temperatuur.

- (a) Bereken de correct-genormeerde kansverdeling  $f(v_x)$ .
- (b) Schets in één plot  $f(v_x)$  als functie van  $v_x$  voor twee temperaturen  $T_1$  en  $T_2$  met  $T_1 > T_2$ ; geef duidelijk aan welke curve hoort bij welke temperatuur.
- (c) Bereken de gemiddelde  $x$ -snelheid  $\langle v_x \rangle$  en de gemiddelde kwadratische  $x$ -snelheid  $\langle v_x^2 \rangle$ .
- (d) Het blijkt een  $d$ -dimensionaal gas te zijn, waarin alle cartesische richtingen equivalent zijn. Bereken de gemiddelde kinetische energie per deeltje.

EINDE