Tentamen TF1
1 februari 2010
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen.
Begin bij elke opgave op een **nieuw en los** vel papier met daarop uw naam.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we soms de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u wel weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa, en is de viscositeit van water gelijk aan $\eta = 10^{-3}$ Pa s. De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal a luidt $D = k_B T/6\pi\eta a$

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA. GEBRUIK PER OPGAVE EEN NIEUW & LOS VEL PAPIER.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN $\sim$ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1

Een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes ondergaat de zgn. Carnot cyclus ABCDA die is opgebouwd uit (i) de isothermen AB en CD bij gegeven temperaturen T en T', respectievelijk, en (ii) de adiabaten BC en DA. We nemen aan dat $T > T'$, en dat $V_B > V_A$ met V_A en V_B de gegeven volumina van het gas in de toestanden A en B, respectievelijk. Het aantal deeltjes N is ook gegeven en verandert niet tijdens deze reversibele cyclus.

(a) Bereken de hoeveelheid warmte Q die het gas opneemt tijdens de isotherme expansie AB.

(b) Bereken het volume V_C van het gas in toestand C.

(c) Bereken de door het gas geleverde arbeid W gedurende de cyclus ABCDA.

Het gas blijkt Argon te zijn, en wordt niet langer ideaal verondersteld. Op temperatuur T voldoet de druk bij volume V aan

$$p = \frac{Nk_BT}{V - Nb} - a\frac{N^2}{V^2}, \tag{1}$$

met a en b gegeven positieve constanten.

(d) Geef een schatting voor de grootte-orde van b, en beschrijf de fysische oorsprong van a. Bereken de kritieke temperatuur T^*.

(e) We beschouwen een isotherme expansie van Argon bij vaste N, maar nu van een toestand met de maximale dichtheid naar een extreem verdunde toestand. Karakteriseer in een paar woorden de toestand(en) van het systeem gedurende deze expansie, voor de twee gevallen (i) $T > T^*$ en (ii) $T < T^*$.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen N deeltjes die elk ofwel spin-up ($s_i = +1$) ofwel spin-down ($s_i = -1$) staan, met $i = 1, 2, \cdots N$. De deeltjes hebben vaste posities, geen onderlinge wisselwerkingen, en door een aangelegd magneetveld met sterkte B is de energie van het systeem gegeven door

$$E(s_1, \cdots, s_N) = -mB\sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{2}$$

met $m > 0$ het magnetisch moment van de deeltjes. De temperatuur van het systeem is T.

(a) Bereken, voor het speciale geval $N = 1$, de kanonieke partitiesom $Z_1(T)$ en de kans $P_+(T)$ dat dit deeltje spin-up staat.

(b) Schets $P_+(T)$ voor $T \in (0, \infty)$ en geef de asymptotische waarden $P_+(0)$ en $P_+(\infty)$. Geef ook een afschatting voor de cross-over temperatuur T^* tussen deze twee asymptotische regimes.

(c) Bereken, voor willekeurige N, het totaal aantal microtoestanden $\Omega(N)$, de Helmholtz vrije energie $F(N, T)$, en de gemiddelde energie per deeltje $U(N, T)/N$.

(d) Gebruik fysische argumenten óf een expliciete berekening ter bepaling van de entropieën S_{hoog} en S_{laag} van het N-deeltjes systeem in zowel de hoge- als lage temperatuur limiet, respectievelijk.

(e) We zetten het magneetveld uit ($B = 0$), en beschouwen nu spins die *wel* onderling wisselwerken, en wel zodanig dat elk paar naburige spins s_i en s_j een interactie energie $-Js_is_j$ heeft, met $J > 0$ de zgn. koppelingsparameter. Karakteriseer (korte uitleg en/of een schets) de toestand van het systeem bij (i) zeer hoge temperatuur $T \gg J/k_B$ en (ii) zeer lage temperatuur $T \ll J/k_B$; geef hierbij fysische argumenten.

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een groot volume ideaal gas met chemische potentiaal μ op temperatuur T. In dit volume bevindt zich een druppeltje water met volume V dat gasdeeltjes kan opnemen en weer afstaan zodat uiteindelijk diffusief evenwicht ontstaat. Een opgenomen gasdeeltjes verhoogt zijn potentiële energie met een hoeveelheid α door het directe contact met het water, ongeacht de positie in de waterdruppel; de kinetische energie van een gasdeeltje veronderstellen we zowel binnen als buiten de druppel gegeven door $\mathbf{p}^2/2m$, met $\mathbf{p}$ de impuls en m de massa van een gasdeeltje.

(a) Bereken, voor het geval dat de waterdruppel slechts één gasdeeltje heeft opgenomen, de kanonieke partitiesom $Z_1(T, V)$ van dit ene deeltje.

(b) Bereken vervolgens, voor het geval dat de waterdruppel N gasdeeltjes heeft opgenomen, de N-deeltjes kanonieke partitiesom $Z_N(V, T)$ van de opgenomen deeltjes.

(c) In werkelijkheid zal het aantal opgenomen gasdeeltjes in de druppel niet constant zijn. Bereken de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}_{\mathrm{gc}}(\mu, V, T)$, en hieruit het gemiddeld aantal deeltjes $\langle N \rangle$ in de druppel en de bijbehorende standaard deviatie.

(d) De gasdeeltjes in de druppel vertonen Brownse beweging met diffusie coefficient D. Geef een uitdrukking voor de tijdsduur t die een een gegeven deeltje gemiddeld nodig heeft om van het centrum van de bolvormig veronderstelde druppel naar het oppervlak te diffunderen.

(e) Schat t af (met eenheid) voor het geval dat de water druppel op kamer temperatuur zit, een straal van 1 cm heeft, en het een opgelost atomair gas (zoals Helium of Argon) betreft.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een 1-dimensionale harmonische oscillator met massa m en eigenfrequentie ω, zodat de *quantummechanische* energie-niveaus gegeven zijn door $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ met quantumgetallen $n = 0, 1, 2, \cdots$. De oscillator is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Bereken de quantummechanische kanonieke partitiesom $Z_{QM}(T)$ van dit deeltje.

(b) Bereken (of geef met fysische argumenten) de gemiddelde energie van de oscillator voor (i) $T \gg \hbar\omega/k_B$ en (ii) $T \ll \hbar\omega/k_B$.

De energie van dezelfde oscillator kan *klassiek* beschreven worden als de som van kinetische en potentiele energie, $E(x, p_x) = p_x^2/2m + m\omega^2 x^2/2$, met x en p_x de uitwijking en de bijbehorende impuls, respectievelijk.

(c) Bereken de kanonieke partitiesom $Z_{kl}(T)$ en de gemiddelde energie van dit klassieke deeltje.

(d) Is er een regime of limiet waar uw klassieke en quantummechanische resultaten overeenkomen, en zo ja/nee waarom wel/niet?.

(e) Geef de correct genormeerde kansverdeling $W(x)$ voor de uitwijking x van de klassieke oscillator.

EINDE