

# Hertentamen TF1

15 maart 2010

9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.

Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen.

Begin bij elke opgave op een **nieuw en los** vel papier met daarop uw naam.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met  $T$ , en de constante van Boltzmann met  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ . Ook gebruiken we soms de afkorting  $\beta = 1/(k_B T)$ . Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , het getal van Avogadro aan  $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , en de gas constante aan  $R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Zoals u wel weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan  $10^5 \text{ Pa}$ , en de viscositeit van water aan  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$ . De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal  $a$  luidt  $D = k_B T / 6\pi\eta a$ .

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE  
PAGINA. GEBRUIK PER OPGAVE EEN NIEUW & LOS VEL  
PAPIER.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE  
HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG --IN  
GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN  
AFSCHATTING VAN  $\sim 1$  SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN  
GROOTTE.

**Opgave 1** —begin op een nieuw vel s.v.p.

De snelheids-component  $v_x$  van gas-deeltjes in de  $x$ -richting wordt vele malen gemeten. De kansverdeling voor  $v_x$  blijkt te voldoen aan

$$f(v_x) \propto \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right),$$

met  $m$  de massa van een gas deeltje en  $T$  de gas temperatuur.

- (a) Bereken de correct-genormeerde kansverdeling  $f(v_x)$ .
- (b) Bereken de gemiddelde  $x$ -snelheid  $\langle v_x \rangle$  en de gemiddelde kwadratische  $x$ -snelheid  $\langle v_x^2 \rangle$  van de gas-deeltjes

Het gas bestaat uit  $N$  identieke puntdeeltjes en mag ideaal verondersteld worden. Bij de gegeven temperatuur  $T$  wordt het gas isotherm gecomprimeerd van een begin-volume  $V$  tot een eind-volume  $V/2$ , waarbij  $N$  niet verandert.

- (c) Bereken de warmte  $Q$  die tijdens deze compressie door het gas wordt afgestaan aan de omgeving.

Het gas wordt vervolgens vanuit het volume  $V/2$  weer geëxpandeerd tot het oorspronkelijke volume  $V$ , maar nu adiabatisch.

- (d) Bereken de eind-temperatuur  $T'$  van het gas, en tevens de door het gas geleverde arbeid  $W'$  en de toegevoerde warmte  $Q'$  tijdens deze expansie.

Na de bovenstaande adiabatische expansie tot volume  $V$  blijkt het gas een temperatuur van 27 graden Celsius en een druk van 9 atmosfeer te hebben. Het aantal gas deeltjes blijkt bovendien gelijk te zijn aan het getal van Avogadro.

- (e) Bereken het volume  $V$  in liters.

**Opgave 2** —begin op een nieuw vel s.v.p.

- (a) Beschouw een motor die 3/4 van de energie van de verbruikte brandstof omzet in (nuttig) vermogen, terwijl 1/4 als restwarmte wordt gedumpt in de buitenlucht op temperatuur  $T_1 = 300\text{K}$ . Bereken de temperatuur  $T_2$  die de verbrandingskamer minstens moet hebben.

- (b) Schat het aantal stikstofmoleculen in een liter vloeibare stikstof.

- (c) Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad (1)$$

waarbij  $S$  de entropie,  $p$  de druk,  $T$  de temperatuur, en  $V$  het volume is van een of ander thermodynamisch systeem.

- (d) Bereken de verwachte tijdsduur die een bolvormige stuifmeelkorrel met een straal van een micrometer nodig heeft om door een laagje stilstaand water van 1 cm te diffunderen.
- (e) Als de Helmholtz vrije energie van een zeker thermodynamisch systeem gegeven wordt door  $F(T, V) = -VT^2/3$ , bereken dan de energie  $U(S, V)$  m.b.v een Legendre transformatie. De notatie is standaard, zoals bijv. in (c), en het deeltjes aantal is vast verondersteld.

### Opgave 3

We beschouwen een enkel deeltje dat zich in 3 microtoestanden kan bevinden: ofwel in de grondtoestand met energie  $\epsilon_0$ , ofwel in de eerste aangeslagen toestand met energie  $\epsilon_1$ , ofwel in de tweede aangeslagen toestand met energie  $\epsilon_2$ . Er geldt  $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ . Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur  $T$ .

- Bereken de kanonieke partitiesom van dit ene deeltje.
- Geef de waarschijnlijkheden  $P_j$  dat dit ene deeltje in toestand  $j$  zit voor  $j = 0, 1, 2$ .
- Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw bovenstaande resultaten) de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge- $T$  en (ii) de lage- $T$  limiet.

We beschouwen nu  $N \gg 1$  van zulke deeltjes, alle vastgeprikt op  $N$  roosterpunten. Het systeem is ontkoppeld van het warmtebad, en wel zodanig dat er nu  $n_0$  deeltjes in grondtoestand zitten,  $n_1$  in de eerste aangeslagen toestand, en  $n_2 = N - n_0 - n_1$  in de tweede aangeslagen toestand. Er geldt  $n_j \gg 1$  voor  $j = 0, 1, 2$ .

- Laat zien dat de entropie dan geschreven kan worden als

$$S = -Nk_B(x_0 \ln x_0 + x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2) \quad (2)$$

met  $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ . Geef uitdrukkingen voor de composities  $x_0$  en  $x_1$ , en beargumenteer of  $S$  extensief, intensief, dan wel (geen van) beide is.

- Bereken de composities  $x_0$  en  $x_1$  waarvoor de entropie (i) maximaal en (ii) minimaal is.

### Opgave 4

—begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een systeem van  $N$  klassieke deeltjes in een volume  $V$  bij temperatuur  $T$ . De positie en de impuls van deeltje  $i$  noemen we  $\mathbf{r}_i$  en  $\mathbf{p}_i$ , respectievelijk, en de interactie potentiaal tussen twee deeltjes op afstand  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  noemen we  $u(r_{ij})$ . Derhalve wordt de kanonieke partitiesom geschreven als

$$Z(N, V, T) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d\mathbf{r}_1 \cdots \int d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{p}_1 \cdots \int d\mathbf{p}_N \exp \left[ -\beta \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N u(r_{ij}) \right], \quad (3)$$

met  $m$  de massa van de deeltjes en  $h$  de Planck constante. We nemen eerst in (a) t/m (c) aan dat het een ideaal gas betreft.

- Geef  $u(r_{ij})$  en de integratie grenzen van  $\mathbf{r}_i$  en  $\mathbf{p}_i$ , en bereken  $Z$  voor dit ideale gas.
- Laat zien, wederom voor een ideaal gas, dat de Helmholtz vrije energie geschreven kan worden als  $F(N, V, T) = Nk_B T \left( -1 + \ln \frac{N\Lambda^3}{V} \right)$ , met  $\Lambda$  de thermische (DeBroglie) golflengte. Bereken  $\Lambda$  en bediscussieer kort de fysische betekenis.
- Gebruik de resultaten van (a) en/of (b) om de chemische potentiaal  $\mu$ , de druk  $p$ , en de gemiddelde energie  $E$  van het ideale gas te berekenen.

Het systeem blijkt het edelgas Argon te zijn, en wordt dus niet langer ideaal verondersteld. De kritieke dichtheid en temperatuur van Argon zijn bekend en worden  $\rho_c$  en  $T_c$  genoemd.

- Schets de interactie potentiaal  $u(r)$  voor  $r \in (0, \infty)$  met een schaal op de  $r$ -as, en bespreek kort de fysische oorsprong van  $u(r)$  voor  $r \rightarrow 0$  en  $r \rightarrow \infty$ .
- Beschrijf, voor een begin-toestand  $N/V = \rho_c$  en  $T = 3T_c$ , de toestand(en) van het systeem voor (i) reversibele isochore afkoeling tot  $T = T_c/2$ , en (ii) reversibele isotherme compressie tot  $N/V = 3\rho_c$ .

EINDE