Her-tentamen Statistische Fysica
12 maart 2012
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven.
Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam.
De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen.

Opgave 1 en 3 bestaan elk uit 7 onderdelen (a) t/m (g).
Opgave 2 bestaat uit 6 onderdelen (a) t/m (f).

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN $\sim$ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1
We beschouwen eerst een enkel deeltje dat zich in 3 microtoestanden kan bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie 0, ofwel in de eerste aangeslagen toestand met energie ϵ, ofwel in de tweede aangeslagen toestand met energie 2ϵ. Er geldt $\epsilon > 0$, en het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Wat is de kans dat het deeltje in de grondtoestand zit?

(b) Bereken de temperatuur-afhankelijke gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje.

(c) Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw resultaat bij onderdeel (b)) de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet. De limieten zijn geldig voor $T \gg T^*$ en $T \ll T^*$, respectievelijk. Geef een afschatting voor de crossover-temperatuur T^*.

We beschouwen nu een een deeltje dat niet in slechts drie maar in oneindig veel microtoestanden kan zitten, met energie $\epsilon_n = n\epsilon$ in microtoestand $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$. Wederom geldt $\epsilon > 0$, en is er sprake van thermisch evenwicht op temperatuur T.

(d) Bereken kanonieke partitiesom $Z(T)$ van dit deeltje, en vervolgens de kans P_n om het deeltje in toestand n aan te treffen.

(e) Geef zowel de hoge- als ook de lage-T limiet van de gemiddelde energie van dit deeltje, dan wel op basis van een berekening dan wel op basis van fysische argumenten.

We beschouwen nu $N \gg 1$ identieke niet-wisselwerkende deeltjes, elk vastgeprikt op een roosterpunt en elk met een bekend verondersteld een-deeltjes kanonieke partitiesom $Z_1(T)$.

(f) Geef een uitdrukking voor de Helmholtz vrije energie $F(N, T)$ van het N-deeltjes systeem, en voor de chemische potentiaal $\mu(T)$. Geef voor zowel F als μ aan of ze extensief, intensief, beide, of geen van beide zijn.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.
Beschouw een afgesloten thermodynamisch systeem met vaste totale energie U. Het systeem bestaat uit twee thermisch gekoppelde deelsystemen "1" en "2" met energieën U_1 en U_2 en entropieën $S_1(U_1)$ en $S_2(U_2)$, respectievelijk, uiteraard zodanig dat $U_1 + U_2 = U$. Er is thermisch evenwicht, en we nemen aan dat de deelsystemen zo groot zijn dat fluctuaties in U_1 en U_2 niet van belang zijn.

(a) Gebruik de Hoofdwetten der Thermodynamica om te laten zien dat U_1 en U_2 zodanig zijn dat de temperaturen $T_1(U_1)$ en $T_2(U_2)$ in de twee deelsystemen gelijk zijn.

(b) Als "2" veel groter is dan "1", dus $U_2 \gg U_1$, laat dan zien dat U_1 zodanig is dat de Helmholtz vrije energie van "1" minimaal is.

Nu een aantal losse vragen.

(c) Een stationair draaiende warmtemachine levert per cyclus 2 kJ aan arbeid, terwijl tevens 2 kJ aan restwarmte wordt gedumpt in de buitenlucht op temperatuur $T_1 = 300\text{K}$. Bereken de temperatuur T_2 die het warmtebad (waaraan de warmte wordt onttrokken) *minstens* moet hebben.

(d) Bereken het aantal mol gasdeeltjes in een liter ideaal gas onder atmosferische druk op kamertemperatuur.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

(e) Bereken de warmte Q die een ideaal gas van N puntdeeltjes op temperatuur T opneemt tijdens een reversibele en isotherm expansie van een begin-volume V_b naar een (groter) eind-volume V_e.

(f) Bereken de differentiaal dG van de Gibbs vrije energie $G(N, p, T)$ van een thermodynamisch systeem van N deeltjes op temperatuur T onder druk p, uitgaande van de Eerste Hoofdwet voor N deeltjes in een volume V met entropie S. De chemische potentiaal wordt aangeduid met μ.

(g) Een ideaal gas van louter en alleen atomen A ondergaat, bij vaste temperatuur T en volume V, de chemische "dimerisatie" reactie $2A \leftrightarrow A_2$. Als er na de reactie een nieuw evenwicht is ingesteld met twee maal zoveel gevormde A_2 moleculen dan overgebleven vrije atomen A, is de druk P_n ná de reactie dan afgenomen, toegenomen, of gelijk gebleven ten opzichte van de druk P_v vóór de reactie? Bereken P_n/P_v.

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een klassiek gas van identieke deeltjes in een volume V bij temperatuur T. De energie van één deeltje is $E(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/(2m) + V_{ext}(\mathbf{r})$ met $V_{ext}(\mathbf{r})$ de potentiële energie, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de positie van het deeltje, en $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ de impuls van het deeltje.

(a) Bereken de klassieke kanonieke partitiesom Z_1 voor één deeltje voor het geval dat de deeltjes geen onderlinge wisselwerking hebben en er geen extern veld is, d.w.z. $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$.

We beschouwen nu een vlakke wand in evenwicht met dit klasieke ideale gas. Het gas gedraagt zich als reservoir en legt de temperatuur T en de chemische potentiaal μ van het hele systeem vast. De groot-kanonieke partitiesom van het klassieke ideale gas met $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$ wordt gegeven door

$$\mathcal{Z}(\mu, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} z^N (Z_1)^N \tag{1}$$

met $z = \exp(\beta\mu)$ de fugaciteit van het systeem en N het aantal deeltjes. De bijbehorende thermodynamische potentiaal wordt gegeven door $\Phi_G = -k_B T \ln \mathcal{Z}$.

(b) Geef een uitdrukking voor Φ_G in termen van μ, V, en T.

(c) Laat zien dat de fugaciteit z van het gas gegeven wordt door

$$z = Ap(k_B T)^{-5/2} \tag{2}$$

met p de gas druk en k_B de constante van Boltzmann. Geef een uitdrukking voor de constante A.

De wand omvat M adsorptie-posities waarop gas-atomen kunnen adsorberen. Een positie is ófwel onbezet ófwel bezet door een deeltje. De adsorptie op een positie beïnvloedt de adsorptie op naburige posities níet. Een geadsorbeerd deeltje bevindt zich slechts in één microtoestand met energie ϵ; de onbezette adsorptie-positie heeft een energie gelijk aan nul.

(d) Bereken de groot-kanonieke partitie som $\mathcal{Z}_1(T, \mu)$ van een enkele adsorptie-positie in diffusief en thermische evenwicht met het ideale gas op temperatuur T en chemische potentiaal μ.

(e) Bereken het gemiddeld aantal deeltjes $\langle m \rangle$ dat geadsorbeerd is op het gehele oppervlak en geef zowel de hoge- als ook de lage-p limiet.

Veronderstel nu dat er m gas-deeltjes geadsorbeerd zijn zodat de totale energie van de geadsorbeerde laag gelijk is aan $U = m\epsilon$.

(f) Bereken de entropie van m gas-deeltjes, die verdeeld zijn over M adsorptie-posities. Leidt hieruit een verband af tussen de energie U en de temperatuur T.

(g) Bereken de soortelijke warmte van de geadsorbeerde laag bij constant volume als functie van de temperatuur. Schets deze temperatuurafhankelijkheid en geef aan hoe het temperatuurgedrag is bij hoge en lage temperatuur.

EINDE