

Tentamen Statistische Fysica

28 januari 2013

9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.

Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam.

De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen.

Alle opgaven bestaan elk uit 5 onderdelen (a) t/m (e).

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T , en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$. Ook gebruiken we de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$, en de gas constante aan $R = 8.31 \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa , en de viscositeit van water aan $\eta = 10^{-3} \text{Pa s}$. De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal a luidt $D = k_B T / 6\pi\eta a$.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE
PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE
HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN
GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN
AFSCHATTING VAN ~ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN
GROOTTE.

Opgave 1

We beschouwen een systeem van N identieke deeltjes op vaste posities in een regelmatig rooster. Elk deeltje kan zich slechts in een van de twee mogelijke microtoestanden bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie 0, ofwel in de aangeslagen toestand met energie ϵ . Er geldt dat $\epsilon > 0$, er zijn geen onderlinge wisselwerkingen tussen de deeltjes, en $N \gg 1$.

- (a) Geef een fysisch voorbeeld van een zgn. twee-niveau systeem.

We nemen nu aan dat het systeem thermisch geïsoleerd is, met een gegeven energie $U = n\epsilon$. Hier is n het aantal deeltjes in de aangeslagen toestand.

- (b) Bereken de multipliciteit $\Omega(U, N)$ van dit systeem. Bereken vervolgens de entropie $S(U, N)$. Gebruik hierbij de Stirling benadering. Geef aan voor welke waarde(n) van U de entropie maximaal en minimaal is, respectievelijk.
- (c) Bereken de temperatuur $T(U, N)$ van het systeem.

De thermische isolatie wordt nu verwijderd, en het systeem wordt vervolgens in thermische evenwicht gebracht met een warmtebad op temperatuur T . Het aantal deeltjes blijft onveranderd N .

- (d) Bereken de kans P_0 dat een gegeven deeltje zich in de grondtoestand bevindt, en ook de kans P_+ dat het deeltje zich in de aangeslagen toestand bevindt. Zorg voor een goede normering van de kansverdeling! Bereken ook de kanonieke partitiesom $Z(N, T)$.
- (e) We beschouwen nu het geval $\epsilon = 0$, en dat de deeltjes wél met elkaar wisselwerken. De interactie vindt alleen plaats tussen buurdeeltjes op het rooster, en is zodanig dat twee naburige deeltjes in dezelfde 1-deeltjes toestand een energie $-J$ hebben, en een energie $+J$ indien ze in verschillende toestanden zitten. We nemen $J > 0$. Beschrijf in een paar woorden de macroscopische toestand van het systeem voor (i) $k_B T \gg J$ en (ii) $k_B T \ll J$. Schets ook de T -afhankelijkheid van $2n - N$ met n het aantal deeltjes in dezelfde 1-deeltjes toestand.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een enkele quantummechanische harmonische oscillator die in oneindig veel microtoestanden $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ kan zitten, met energie $\epsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ in microtoestand n . Hier is \hbar de constante van Planck en ω de hoekfrequentie. De oscillator is in thermisch evenwicht op temperatuur T .

- (a) Bereken de quantummechanische kanonieke partitiesom $Z_{1,quant}(T)$ van de oscillator, en vervolgens de kans P_n om de oscillator in toestand n aan te treffen.
- (b) Bereken de temperatuur-afhankelijke gemiddelde energie U van de harmonische oscillator.
- (c) Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw resultaat bij onderdeel (b)) de gemiddelde energie van de oscillator in (i) de hoge- T en (ii) de lage- T limiet.

Bij hoge temperaturen $T \gg \hbar\omega/k_B$ gedraagt de oscillator zich als een klassieke veer met veerconstante $m\omega^2$, zodanig dat de Hamiltoniaan (d.w.z. de energie bij uitwijking x en impuls p_x in de x -richting) gegeven wordt door $H(x, p_x) = p_x^2/2m + m\omega^2 x^2/2$, met m de massa.

- (d) Bereken de klassieke partitiesom $Z_{1,klas}(T)$ van deze klassieke oscillator, en geef de relatie aan met $Z_{1,quant}(T)$.

- (e) Bereken de gemiddelde energie U , de warmte capaciteit C_V , en de entropie S van deze klassieke oscillator, en laat zien dat de gemiddelde potentiële energie $U = \langle m\omega^2 x^2/2 \rangle$ voldoet aan het equipartitie theorema.

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen een kristal in thermodynamisch evenwicht met de gas fase. In een eenvoudig model voor een kristal zit elk deeltje opgesloten in zijn eigen cel, waarin het vrij en onafhankelijk kan bewegen. Er zijn dus geen wisselwerkingen tussen de deeltjes. De potentiële energie van een deeltje in de kristal fase is gelijk aan $-\epsilon$ en 0 in de gas fase. De klassieke partitiesom voor N deeltjes in zo'n kristal wordt gegeven door

$$Z(N, T) = \left(\frac{V_{cell} e^{\beta\epsilon}}{\Lambda^3} \right)^N, \quad (1)$$

waarbij V_{cell} het volume is waarin het deeltje vrij kan bewegen in zijn eigen cel, en Λ is de thermische golflengte.

- (a) Bereken de chemische potentiaal μ_s voor een deeltje in het kristal.

De gas fase waar het kristal mee in evenwicht is kan als een klassiek ideaal gas beschouwd worden.

- (b) Wat zijn de condities voor coëxistentie tussen een gas en een kristal fase.
(c) Bepaal de chemische potentiaal μ_g voor de gas fase als functie van de gasdruk p_g .
(d) Leidt een uitdrukking af voor de gasdruk voor coëxistentie van de gas en de kristal fase.

Bij hogere dichtheden kunnen de wisselwerkingen tussen de atomen in het gas niet verwaarloosd worden. De druk p van een gas met N atomen in een volume V en temperatuur T blijkt dan gegeven te worden door

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2} \quad (2)$$

met a en b gegeven positieve constanten.

- (e) Geef een schatting voor de grootte-orde van b . Bereken de kritieke temperatuur T^* en het kritiek volume V^* . Beschrijf in een paar woorden de toestand en/of toestanden van het systeem als functie van het volume V voor $T > T^*$ en $T < T^*$.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.

De snelheid $\mathbf{v}(t)$ op tijdstip t van een bolvormig deeltje met massa m en straal a in water met viscositeit η op kamertemperatuur T voldoet aan de Langevin vergelijking

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -6\pi\eta a \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}, \quad (3)$$

waarbij \mathbf{F} een externe kracht is die werkt op het deeltje.

- (a) Als dit deeltje door de aardse gravitatie kracht $\mathbf{F} = -mg\hat{z}$ in de negatieve \hat{z} -richting naar beneden wordt getrokken, bereikt het na verloop van tijd een constante val- of driftsnelheid \mathbf{v}_d . Bereken \mathbf{v}_d .
(b) Bereken $\mathbf{v}(t)$ voor het geval dat $\mathbf{F} = 0$ en het deeltje een beginsnelheid \mathbf{v}_0 heeft.

Voor het geval dat \mathbf{F} de kracht door wisselwerkingen met het oplosmiddel beschrijft, en $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$, zal het deeltje op lange tijdschaal Browns bewegen. De verplaatsing $x(t)$ van het deeltje in de x -richting gedurende het tijdsinterval t blijkt dan te voldoen aan de waarschijnlijkheidsverdeling

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (4)$$

met D de diffusie coefficient.

- (c) Bereken de gemiddelde kwadratische verplaatsing $\langle x^2(t) \rangle$ als functie van de tijd t .
- (d) Bepaal de tijd t_d die nodig is om een deeltje met een straal $a = 1\mu m$ over een afstand gelijk aan zijn eigen straal a in de x -richting te laten diffunderen in water bij kamertemperatuur. De tijd t_d wordt ook wel de diffusie tijd genoemd.

Een ideaal gas van N_A atomen A ondergaat, bij vaste temperatuur T en volume V , de chemische polymerisatie reactie $nA \leftrightarrow A_n$ met de integer $n > 1$ constant.

- (e) Als er na de reactie een nieuw evenwicht is ingesteld met N_p polymeren A_n , wat is dan het aantal vrije atomen A na de reactie. Bereken de verhouding van de druk p_v vóór de reactie en de druk p_n ná de reactie, dus p_v/p_n .