Tentamen **Statistische Fysica**, woensdag 6 november 2013, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K, en $\beta = 1/(k_B T)$. De elementaire lading is $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa, en de viscositeit van water aan $\eta = 10^{-3}$ Pa s. De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal a luidt $D = k_B T/6\pi\eta a$.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een enkel deeltje in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T. Het deeltje heeft 6 microtoestanden $s = 1, 2, \cdots, 6$ met energieën $\epsilon_s \in \{0, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon, 2\epsilon, 2\epsilon\}$, met $\epsilon > 0$.

(a) Bereken de kanonieke partitiesom $Z(T)$ van dit deeltje.

(b) Bereken de kans P_s om dit deeltje in microtoestand $s = 1, \cdots, 6$ aan te treffen.

(c) Bereken de temperatuur-afhankelijke gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje. Bereken of geef op basis van fysische argumenten de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

We beschouwen nu $N \gg 1$ identieke niet-wisselwerkende deeltjes, elk vastgeprikt op een roosterpunt. De één-deeltjes partitiesom is gegeven door $Z_1(T) = 2\cosh(\beta\epsilon)$.

(d) Geef een fysisch voorbeeld van zulk N-deeltjes systeem. Bereken de N-deeltjes partitiesom $Z_N(T)$ en tevens de Helmholtz vrije energie $F(N, T)$.

(e) Geef een uitdrukking voor de chemische potentiaal $\mu(T)$ van dit systeem, en geef voor zowel F als μ aan of ze extensief, intensief, beide, of geen van beide zijn.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een homogeen klassiek ideaal gas van N identieke deeltjes in een volume V op temperatuur T, met druk $p = Nk_BT/V$ en gemiddelde energie $U = fNk_BT/2$ waar $f > 0$ het aantal vrijheidgraden per deeltje aangeeft.

(a) Bereken de door het gas opgenomen warmte Q tijdens een reversibele isotherme volumeverandering van een beginvolume V_b naar een eindvolume V_e.

(b) Laat voor vaste N zien dat een *adiabatische* volume verandering van V_b naar V_e leidt tot een temperatuursverandering $\Delta T = [(V_b/V_e)^{2/f} - 1]T$, waar T de begin temperatuur is.

(c) Bereken de arbeid W die het gas levert tijdens de adiabatische volumeverandering van onderdeel (b).

De warmtecapaciteit C van dit gas is gedefinieerd als $dQ = CdT$ met dQ de (kleine) toegevoerde warmte en dT de (kleine) temperatuursverandering.

(d) Bereken de warmtcapaciteiten C_V (bij vaste volume V) en C_p (bij vaste druk) van dit gas.

(e) De enthalpie H is gedefiniëerd als $H = U + pV$. Geef de differentiaal dH van H, en leidt hieruit een Maxwell vergelijking af.

—ZIE OMMEZIJDE —

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen één enkel klassiek puntdeeltje met massa m in een oneindig twee-dimensionaal vlak op temperatuur T. De positie van het deeltje is (x, y) en de impuls (p_x, p_y). In het vlak heerst een harmonische potentiaal $V(x, y) = C(x^2 + y^2)/2$ met $C > 0$ de veerconstante, zodat de totale energie van het deeltje gegeven wordt door $E = (p_x^2 + p_y^2)/(2m) + V(x, y)$. De partitiesom van dit ene deeltje wordt dus gegeven door

$$Z = \frac{1}{h^2} \int dx \int dy \int dp_x \int dp_y \exp(-\beta E), \tag{1}$$

met h de constante van Planck.

(a) Gebruik relevante integratie grenzen en bereken Z.

(b) Wat is de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ van dit deeltje?

(c) Bereken de entropie S van dit deeltje.

We zetten nu de harmonische potentiaal uit (dus $C = 0$) en beschouwen een ideaal gas van N van deze deeltjes in het twee-dimensionale oppervlak ter grootte $L \times L \equiv A$.

(d) Bereken de kanonieke partitiesom $Z(N, A, T)$ van dit gas en laat zien dat hieruit de Helmholtz vrije energie $F(N, A, T) = Nk_BT[-1 + \ln(N\Lambda^2/A)]$ volgt, met Λ de thermische golflengte.

(e) Bereken de twee-dimensionale druk p van dit gas, d.w.z de gemiddelde kracht per lengte L van de deeltjes op een wand (van lengte L).

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
Beschouw een adsorptie plek in contact met een gas op chemische potentiaal μ en temperatuur T. De plek kan al dan niet bezet worden door één geadsorbeerd gas deeltje. De energie van de plek is nul als de plek "leeg" is, en ϵ als de plek bezet is.

(a) Bereken de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}_{gr}(\mu, T)$ van deze adsorptieplek.

(b) Bereken de kans dat de plek bezet is, en schets deze kans als functie van μ in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

Beschouw een colloïdaal deeltje dat Brownse (random) beweging vertoont langs de x-as, te beginnen op $x = 0$ op tijdstip $t = 0$. We nemen voor het gemak aan dat het deeltje elke seconde ofwel een stap ter groottte b naar links of rechts maakt, met gelijke kans 1/2. Na N seconden kan het deeltje zich bevinden op $x(N) = Mb$, met $M = N_+ - N_-$, met $N_\pm$ het aantal stappen naar rechts/links, en dus $N = N_+ + N_-$.

(c) Bereken het aantal mogelijke paden $\Omega_N(M)$ waarmee het deeltje na N seconden op positie $x(N) = Mb$ kan uitkomen.

(d) Als gegeven is dat $\Omega_N(M) \propto \exp(-M^2/2N)$ voor $N \gg 1$, bereken dan de diffusie coefficiënt D van het deeltje voor het geval dat $b = 1\mu$m.

Beschouw de chemische reactie $A + 2B \leftrightarrow AB_2$, waarbij zowel de reactanten als de producten gasvormig zijn en als ideaal mogen worden verondersteld.

(e) Geef de relatie tussen de evenwichtsconstante $K(T)$ van deze reactie en de partiële drukken p_A, p_B en p_{AB_2} in evenwicht. Beargumenteer of de reactie naar rechts of links verschuift als de druk van het mengsel *verhoogd* wordt bij vaste temperatuur T.

— EINDE —