Bevat:

Opgave	1	a t/m e
Opgave	2	a t/m e
Opgave	3	a t/m b
Opgave	4	a t/m b

De constante b correspo…

Opgave 1 $\quad p = \frac{N k_B T}{V - Nb}$

a) $dU = dQ + dW$

Isotherm $\Rightarrow dU = 0$, T constant

Reversibel $\Rightarrow dQ = TdS$

Dus $pdV = TdS$

Dan is $\int_{V_1}^{V_2} \frac{N k_B T}{V - Nb} dV = Q$

Dus $N k_B T \ln\left(\frac{V_2 - Nb}{V_1 - Nb}\right) = Q$

Dan is $\ln(V_2 - Nb) - \ln(V_1 - Nb) = \frac{Q}{N k_B T}$

Dus $\frac{V_2 - Nb}{V_1 - Nb} = e^{\frac{Q}{N k_B T}}$

Dus $V_2 = e^{\frac{Q}{N k_B T}}(V_1 - Nb) + Nb$

Ω_{na}, dus de verhouding $\frac{\Omega_{na}}{\Omega_{voor}} = 1$

het volume dat door één deeltje wordt inge

$= \frac{3}{2} N k_B T$

$dU = dQ + dW$

Adiabatisch $\Rightarrow dQ = 0$

Dus $dU = dW$

Dan is $\frac{3}{2} N k_B \, dT = -\frac{N k_B T}{V - Nb} dV$

Dit geeft $\frac{3}{2} \frac{1}{T} dT = -\frac{1}{V - Nb} dV$

Dus $\frac{3}{2} \int_{T_b}^{T_e} \frac{1}{T} dT = -\int_{V_b}^{V_e} \frac{1}{V - Nb} dV$

Dan is $\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_e}{T_b}\right) = -\ln\left(\frac{V_e - Nb}{V_b - Nb}\right)$

Dus $\left(\frac{T_e}{T_b}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V_b - Nb}{V_e - Nb}$

Dit geeft $T_e = T_b \left(\frac{V_b - Nb}{V_e - Nb}\right)^{\frac{2}{3}}$

c) De entropie S blijft voor en na de expansie gelijk. Nu geldt dat $S = k_B \ln \Omega$

Dus $\frac{S_{voor}}{S_{na}} = 1 = \frac{k_B \ln \Omega_{voor}}{k_B \ln \Omega_{na}}$, hieruit volgt dat $\Omega_{voor} = \Omega_{na}$, dus de verhouding $\frac{\Omega_{na}}{\Omega_{voor}} = 1$

De constante b correspondeert met het volume dat door één deeltje wordt ingenomen

d) $dU = dQ + dW$

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{3}{2} N k_B + N k_B = \frac{5}{2} N k_B$$

$$V = \frac{N k_B T}{P} + Nb$$

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{N k_B}{P}$$

e) $f(v_x) = C e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\, C = 1$$

Dus $C = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}$

Dus $f(v_x) = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2}$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dv_x = 0$$ Wegens symmetrie

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2}{m} \frac{d}{d\beta} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dv_x =$$

$$= -\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, \frac{2}{m} \frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} dv_x = -\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, \frac{2}{m} \frac{d}{d\beta} \sqrt{\frac{\pi \cdot 2}{m\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\, \frac{2}{m}\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi 2}{m\beta}}} \cdot -\frac{2\pi}{m} \frac{1}{\beta^2} = \frac{m\beta}{2\pi} \frac{1}{m} \frac{2\pi}{m\beta^2} = \frac{1}{m\beta}$$

Dus de variantie is $\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2 = \frac{1}{m\beta}$

b) Een [illegible]

$$P = \frac{e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2}}{1+e^{-\beta\varepsilon_1}+e^{-\beta\varepsilon_2}+e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$

P_1

Opgave 2 Twee deeltjes $i=1,2$ in grondtoestand met energie 0 of aangeslagen toestand met energie ε_i, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$.

a) Aantal microtoestanden

Dit is gelijk aan $2^2=4$ want er zijn twee deeltjes die elk twee energieen kunnen aannemen.

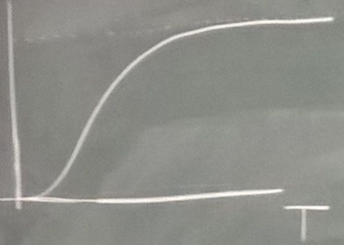
Kanonieke partitiesom

$$Z(T) = \sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = 1 + e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Toestand	Energie 1	Energie 2
1,2 grondtoestand	0	0
1 aangeslagen 2 niet	ε_1	0
2 aangeslagen, 1 niet	0	ε_2
allebei aangeslagen	ε_1	ε_2

Een deeltje aangeslagen, een niet

$$P = \frac{e^{-\beta\varepsilon_1}+e^{-\beta\varepsilon_2}}{1+e^{-\beta\varepsilon_1}+e^{-\beta\varepsilon_2}+e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$



$e^{-\beta\varepsilon} = e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$

T groot $\Rightarrow$ $\frac{\varepsilon}{k_B T}$ nul

$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} \longrightarrow 1$

$P \longrightarrow \frac{1}{2}$

tel $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$, dan $P \rightarrow \frac{1}{2}$ want $e^{-\beta\varepsilon} \rightarrow 1$

T klein $\Rightarrow$ $\frac{\varepsilon}{k_B T}$ groot

tel $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$, dan $P \rightarrow 0$ want $e^{-\beta\varepsilon} \rightarrow 0$

$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} \rightarrow 0$

$P \longrightarrow 0$

aartussen in het begin heeft de functie moeite om te stijgen want voor kleine T is de nderste term meer van invloed dan de bovenste, dus P wordt laag gehouden. Daarna gaan beide ngeveer even snel, en dan gaat de grafiek exponentieel naar $\frac{1}{2}$. Dus als $T \rightarrow \infty$ is de kans even root om een staat aan te treffen waarbij precies één deeltje is aangeslagen als allebei aangeslagen of allebei niet.

ave 2 Twee deeltjes $i=1,2$ in grondtoestand met energie 0 of aangeslagen toestand met energie ε_i, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$

Aantal microtoestanden

Dit is gelijk aan $2^2=4$ want er zijn twee deeltjes die elk twee energieën kunnen aannemen

Kanonieke partitiesom

c) $u(T)$, $S(T)$

$$S = k_B \ln \Omega$$
$$F = -k_B T \ln Z$$
$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$u(T) = \frac{\sum_s \varepsilon_s e^{-\beta \varepsilon_s}}{\sum_s e^{-\beta \varepsilon_s}} = \frac{\varepsilon_1 e^{-\beta\varepsilon_1} + \varepsilon_2 e^{-\beta\varepsilon_2} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{1 + e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}$$

Maar ook $U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right) =$

$$= \frac{-\left(-\varepsilon_1 e^{-\beta\varepsilon_1} - \varepsilon_2 e^{-\beta\varepsilon_2} - (\varepsilon_1+\varepsilon_2) e^{-\beta\varepsilon_2}\right)}{1 + e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}} =$$

$F = U - TS$, $F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)$

$$S(T) = \frac{\left(\varepsilon_1 e^{-\beta\varepsilon_1} + \varepsilon_2 e^{-\beta\varepsilon_2} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)}{T\ Z} + k_B \ln Z$$

e) $F = U - TS = -k_B T \ln Z_N = -k_B T \ln\left(\left(1+e^{-\beta\varepsilon_1}\right)^N\right) =$

$= -N k_B T \ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon_1}\right)$.

$\mu = \left(\frac{dF}{dN}\right)_{T,V} = -k_B T \ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon_1}\right)$.

$dU = dQ + dW =$
$= TdS - pdV + \mu dN$

$dF = dU - TdS - SdT =$
$= -SdT - pdV + \mu dN$

Dus $\mu = \left(\frac{dF}{dN}\right)_{T,V}$

d) $N \gg 1$, energie 0 of $\varepsilon_1 > 0$ zonder wisselwerking.

Ising model, liquid lattice

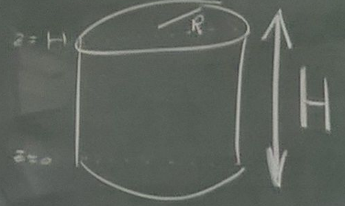
Deeltjes zijn onderscheidbaar dus $Z_N(T) = Z(T)^N$

Hier is $Z(T) = 1 + e^{-\beta\varepsilon_1}$, dus $Z_N(T) = \left(1+e^{-\beta\varepsilon_1}\right)^N$

Opgave 3

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz$$

a) Eén deeltje



$$Z_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} dr \int_0^{H} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}\; e^{-\beta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz\right)} = \int_0^{H} dz\, e^{-\beta mgz} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}\; e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}} =$$

$$= \left(\frac{2\pi R}{-\beta mg}\left(e^{-\beta mgH} - 1\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\pi\, 2m}{\beta}}^{\,3}\right) = \frac{2\pi R}{\beta mg}\sqrt{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^3}\left(1 - e^{-\beta mgH}\right).$$

b) Deeltjes zijn ononderscheidbaar dus $Z(T) = \frac{(Z_1)^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\beta mg}\right)^N \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N}}\left(1 - e^{-\beta mgH}\right)^N$

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln\left(\frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi R}{\beta mg}\right)^N \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N}}\left(1 - e^{-\beta mgH}\right)^N\right) =$$

$$= -k_B T\left(\underbrace{-\ln(N!)}_{-(N\ln N - N)} + N\ln\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^3}\,\frac{2\pi R}{\beta mg}\left(1 - e^{-\beta mgH}\right)\right)\right) \simeq \text{Volgens Stirling}$$

$$= -k_B T N\left(1 + \ln\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^3}\,\frac{2\pi R}{\beta mgN}\left(1 - e^{-\beta mgH}\right)\right)\right) = k_B T N\left(-1 + \ln\left(\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^3}\,\frac{\beta mgN}{2\pi R\left(1 - e^{-\beta mgH}\right)}\right)\right)$$

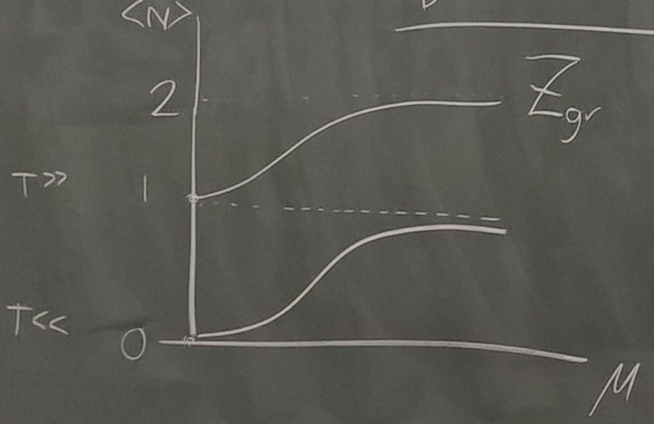
gave 4   Eén plek, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$.

$$Z_{gr}(\mu, T) = \sum_{\nu} e^{-\beta\varepsilon_\nu + \beta\mu N_\nu} = 1 + e^{-\beta 2\varepsilon + \beta\mu 2} + 2e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu}$$

Deeltjes	Energie
$N=0$,	0
$N=2$,	2ε
$N=1$,	ε
$N=1$,	ε

b) Gevraagd: $\langle N \rangle$

$$\langle N \rangle = \frac{\sum_{\nu} N_\nu e^{-\beta\varepsilon_\nu + \beta\mu N_\nu}}{Z_{gr}} = \frac{2e^{-2\beta\varepsilon + 2\beta\mu} + 2e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu}}{1 + e^{-\beta 2\varepsilon + \beta\mu 2} + 2e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu}}$$



$\mu \gg$ $T \gg$ $$\frac{2e^{2\beta\mu} + 2e^{\beta\mu}}{1 + e^{2\beta\mu} + 2e^{\beta\mu}}$$

$\mu \gg$ $T \ll$