Tentamen **Statistische Fysica**, woensdag 5 november 2014, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K, en $\beta = 1/(k_BT)$. De elementaire lading is $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een homogeen klassiek ideaal gas van N identieke puntdeeltjes in een volume V op temperatuur T, dus de gemiddelde energie is $U = 3Nk_BT/2$.

(a) Bereken het eindvolume V' als het gas gedurende een reversibele isotherme expansie een hoeveelheid warmte Q heeft opgenomen vanuit een beginvolume V en een begintemperatuur T.

(b) Laat eerst zien dat een adiabatische uitgevoerde (infinitesimale) volume verandering dV van het gas leidt tot een temperatuursverandering $dT = -(2/3)(T/V)dV$, en bereken hieruit vervolgens de eindtemperatuur T_{na} van het gas na een adiabatische compressie vanuit een beginvolume V en begintemperatuur T tot een eindvolume $V/3$.

(c) Bereken de door het gas opgenomen hoeveelheid warmte Q gedurende een isobare expansie vanuit een begintemperatuur T en beginvolume V naar een eindvolume $2V$.

De energie van een foton gas in een volume V met entropie S blijkt te worden gegeven door $U(S,V) = cS^{4/3}V^{-1/3}$ met $c > 0$ een bekend verondersteldе constante.

(d) Bereken de stralingsdruk p als functie van de temperatuur T van dit foton gas.

(e) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(T,V)$ van dit foton gas.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een enkel deeltje in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T. Het deeltje heeft 4 microtoestanden $s = 0,1,2,3$ met energieën $\epsilon_s = 0, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon$, respectievelijk, met $\epsilon > 0$.

(a) Bereken de kanonieke partitiesom $Z(T)$ en de Helmholtz vrije energie $F(T)$ van dit deeltje.

(b) Bereken de kans P_0 om dit deeltje in microtoestand $s = 0$ aan te treffen, en tevens de kans W om dit deeltje met energie ϵ aan te treffen.

(c) Bereken de gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje. Geef op basis van fysische argumenten (of bereken) (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet van $u(T)$.

We beschouwen nu een deeltje op de x-as op temperatuur T. Uit vele metingen blijkt dat de positie x van dit deeltje verdeeld is als $P(x) \propto \exp(-\alpha x(x-2))$ met $\alpha > 0$ een constante.

(d) Geef of bereken de correct genormeerde verdeling $P(x)$ en geef de gemiddelde positie $\langle x \rangle$ en de standaard deviatie σ.

(e) Geef (met korte motivatie) aan of $\langle x \rangle$ en σ afnemen, toenemen, of gelijk blijven als T stijgt.

—ZIE OMMEZIJDE —

Opgave 3
We beschouwen een simpel model van een vloeistofdruppel van N klassieke identieke puntdeeltjes in een 3-dimensionaal volume V op temperatuur T. Elk vloeistofdeeltje heeft een potentiële energie $-\epsilon$ als gevolg van de nabijheid van andere deeltjes in de vloeistofdruppel, ongeacht de positie $\mathbf{r}_i$ van het deeltje in de druppel. Er geldt $\epsilon > 0$, en $i = 1, 2, \cdots, N$ is een label voor de deeltjes. De kanonieke partitiesom wordt gegeven door

$$Z(N,V,T) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_V d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N \exp[-\beta \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{p}_i^2/(2m) - \epsilon)],$$

met h de constante van Planck, m de massa van een deeltje, en $\mathbf{p}_i$ de impuls van deeltje i.

(a) Verklaar kort de voorfactor $1/N!$, geef de grenzen van de impulsintegraties, en laat zien dat $Z(N,V,T) = \exp[\beta\epsilon N]V^N/(N!\Lambda^{3N})$. Bereken Λ, en geef de dimensie van Λ.

(b) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(N,V,T)$ en de chemische potentiaal $\mu(N,V,T)$ van de vloeistof; maak hierbij gebruik van de Stirling formule. Zijn F en μ extensief of intensief?

We veronderstellen nu dat de druppel deeltjes kan uitwisselen met een groot gasreservoir bestaande uit dezelfde puntdeeltjes als in de druppel. Omdat het gas in dit reservoir zeer verdund is, is de potentiële energie van elk deeltje in het gas te verwaarlozen. Verder is de temperatuur van het reservoir T, de gasdruk in het reservoir is p en dus is de chemische potentiaal in het reservoir $\mu_r = k_BT\ln(p\Lambda^3/k_BT)$. Het aantal deeltjes in de vloeistofdruppel kan nu dus fluctueren, maar heeft een gemiddelde waarde $\langle N\rangle$.

(c) Geef een uitdrukking voor de groot kanonieke partitiesom $Z_{gr}(\mu, V, T)$ voor de vloeistof in de druppel. Welke conditie bepaalt het diffusief (of chemisch) evenwicht tussen het gas reservoir en de vloeistofdruppel?

(d) Bereken de evenwichtsdichtheid van deeltjes $\langle N\rangle/V$ in de vloeistofdruppel als functie van p, T, ϵ. Is $\langle N\rangle/V$ groter of kleiner dan de dichtheid in het gas reservoir, of even groot?

(e) Bereken $\sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}/\langle N\rangle$ in de vloeistofdruppel en geef, voor het geval dat $\langle N\rangle = 10^{24}$, de orde van grootte van de typische relative fluctuaties rondom $\langle N\rangle$.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

(a) Een cyclische warmtemachine die werkt tussen twee warmtebaden levert per cyclus een hoeveelheid arbeid die gelijk is aan 30% van de opgenomen warmte uit het warme bad op 90°C. Geef (met argumentatie) de hoogst mogelijke temperatuur van het koude bad?

(b) Geef (met korte argumentatie) de differentiaal dH van de enthalpie $H(S,p,N)$ van een thermodynamisch systeem met entropie S, druk p, aantal deeltjes N, temperatuur T, volume V, en chemische potentiaal μ.

(c) Een thermodynamisch systeem verricht reversibel een hoeveelheid arbeid W bij constante temperatuur en constante deeltjesaantallen. Beredeneer of hierbij de energie, de Helmholtz vrije energie, de Gibbs vrije energie, of de enthalpie toeneemt dan wel afneemt met een bedrag W.

(d) Een homogene CuZn legering bestaat uit N_1 koperdeeltjes en N_2 zinkdeeltjes random verdeeld op een kristalrooster bestaande uit precies $N_1 + N_2$ roosterpunten; er zijn dus geen defecten, vacatures, etc. Bereken eerst het aantal microtoestanden en laat vervolgens zien dat de entropie geschreven kan worden als $S = -(N_1 + N_2)k_B[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)]$ voor zekere x. Bereken x.

(e) Beschouw een systeem van identieke deeltjes met een gas-vloeistof kritiek punt bij temperatuur T_c, druk p_c, en volume-per-deeltje v_c. Schets in een enkele plot de druk p als functie van het volume-per-deeltje v voor een temperatuur (i) $T \gg T_c$, (ii) $T = T_c$, en (iii) $T < T_c$. Beargumenteer uw schetsen kort.

— EINDE —