Toets 1 van de cursus Statistische Fysica Theorie en Experiment, 11/09/2015, 13:30-14:30. Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Motiveer uw antwoorden kort en bondig. Schrijf uw naam op elk vel. Calculator, boek, of bundel zijn niet toegestaan; een blauwe of zwarte pen volstaat (s.v.p. geen potlood). Elk van de 13 deelvragen is maximaal 7 of 8 punten waard (totaal 100), besteed dus tijd aan elke deelvraag. Succes!

1. We beschouwen een systeem van 8 deeltjes met elk een "spin" variabele $s_i = +1$ ("spin-up") of $s_i = -1$ ("spin-down") met $i = 1, \cdots, 8$.
   (a) Hoeveel microtoestanden heeft dit systeem?
   (b) Hoeveel microtoestanden heeft het systeem als gegeven is dat $\sum_{i=1}^{8} s_i = 4$?

2. (a) Leid af dat
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha} \text{ voor } \alpha > 0. \tag{1}$$
   (b) Bereken
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 \exp(-\alpha x^2) \text{ voor } \alpha > 0. \tag{2}$$
   (c) Een stochastische variabele x is Gaussisch verdeeld met gemiddelde 3 en variantie 2. Geef de (goed-genormeerde) kansverdeling van x.
   (d) Leid af dat
$$\ln(n!) \simeq n \ln n - n \text{ voor } n \gg 1. \tag{3}$$

3. Bereken de standaard deviatie van het aantal ogen van een enkele dobbelsteenworp.

4. Beschouw een (reële) variabele x die voldoet aan de kansverdeling $p(x) = \exp(-x)$ voor $x \geq 0$ en $p(x) = 0$ voor $x < 0$.
   (a) Bereken het gemiddelde van x.
   (b) Bereken de standaard deviatie van x.

5. De ideale gas wet $pV = Nk_BT$ geeft een relatie tussen de druk p, het volume V, het aantal gas deeltjes N, en de (absolute) temperatuur T van het gas. Hier is $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$J/K de constante van Boltzmann. Geef op basis hiervan de orde van grootte van de typische afstand a tussen naburige gas deeltjes voor het geval van kamertemperatuur en atmosferische druk.

6. Geef een voorbeeld van (i) een extensieve grootheid, (ii) een intensieve grootheid, en (iii) een multiplicatieve grootheid van een thermodynamisch systeem.

7. Beschouw een deeltje dat in *drie* mogelijke microtoestanden $s = 0, 1, 2$ kan zitten, ofwel in toestand $s = 0$ met energie 0, ofwel in toestand $s = 1$ met energie $\epsilon > 0$, ofwel in toestand $s = 2$ met energie 2ϵ. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.
   (a) Bereken de kansen P_s om toestand $s = 0, 1, 2$ aan te treffen.
   (b) Bereken de gemiddelde energie $E(T)$ van het deeltje.
   (c) Geef de hoge-T en lage-T limiet waarden van $E(T)$.

—— EINDE ——

Modeluitwerking Toets 1 dd 11/09/2015

1. a) 7 2^8 $(=256)$

b) 7 Als $\sum_i s_i = 4 = 6-2$ dan zijn er 6 spins "up" en 2 spins "down" 2

dus aantal microtoestanden $= \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

2 a) 7 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} \right)^{1/2}$

$$= \left(2\pi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-\alpha r^2} \right)^{1/2} = \left(2\pi \tfrac{1}{2} \int_0^\infty d(r^2)\, e^{-\alpha r^2} \right)^{1/2}$$

$$= \left((\pi/\alpha)\, (-) e^{-\alpha r^2} \Big|_{r^2=0}^{r^2=\infty} \right)^{1/2} = (\pi/\alpha)^{1/2} = \sqrt{\pi/\alpha}\,.$$

8 b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 e^{-\alpha x^2} \overset{4}{=} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \sqrt{\pi}\, \alpha^{-1/2}$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right) \alpha^{-5/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\, \alpha^{-5/2}$$

7 c) $P(x) = Ce^{-(x-3)^2/2\cdot 2} = Ce^{-(x-3)^2/4}$ 4

normering moet zdd $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x) = 1 = C\sqrt{\pi/(1/4)} = C\sqrt{4\pi}$

dus $C \overset{3}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ dus $P(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-(x-3)^2/4}$

7 d) $\ln(n!) = \sum_{m=1}^{n} \ln m \underset{3}{\simeq} \int_1^n \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_{x=1}^{n} \approx n\ln n - n$ als $n \gg 1$

3) variantie $= \sigma^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \langle x\rangle)^2 = \frac{\left((5/2)^2 + (3/2)^2 + (1/2)^2\right)\cdot 2}{6}$

7

$$= \frac{25+9+1}{3\cdot 4} = \frac{35}{12} \quad \text{dus stand dev} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

4) a) $\langle x \rangle \overset{2}{=} \int_0^\infty dx\, p(x)\, x = \int_0^\infty dx\, x e^{-x} \overset{3}{=} \frac{-d}{d\lambda}\int_0^\infty dx\, e^{-\lambda x}\Big|_{\lambda=1}$

7

$$= -\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{\lambda^2}\Big|_{\lambda=1} = 1$$

of m.b.v. partiële integratie:

$$\int_0^\infty dx\, x e^{-x} = -\int d(e^{-x})\, x = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty dx\, e^{-x}$$

$$= 0 - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

b) $\langle x^2 \rangle \overset{2}{=} \int_0^\infty dx\, p(x)\, x^2 \overset{2}{=} \frac{d^2}{d\lambda^2}\int_0^\infty dx\, e^{-\lambda x}\Big|_{\lambda=1} =$

7

$$= \frac{d^2}{d\lambda^2}\frac{1}{\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \frac{2}{\lambda^3}\Big|_{\lambda=1} \overset{1}{=} 2$$

dus $\sigma^2 \overset{2}{=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 2 - 1 = 1$ dus $\underline{\sigma = 1}$ stand. dev

5.

7 $$a \doteq \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \doteq \left(\frac{k_B T}{p}\right)^{1/3} \doteq \left(\frac{4 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}{10^5\ \mathrm{Pa}}\right)^{1/3}$$

$$= \left(40 \cdot 10^{-27}\ m^3\right)^{1/3} \sim 3\text{-}4 \cdot 10^{-9}\ m \doteq \sim 3\text{-}4\ nm$$

6. (i) volume, # deeltjes, energie 2

7 (ii) druk, temperatuur, dichtheid 2

(iii) # microtoestanden, partitiesom 3

7) a) Boltzmann $$P_s = e^{-\beta \varepsilon_s} \Big/ \sum_s e^{-\beta \varepsilon_s} \quad \text{met } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

dus $$P_0 = \frac{1}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}}$$ 2

7 $$P_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}}$$ 2

$$P_2 = \frac{e^{-2\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}}$$ 2

3 b) $$E(T) \doteq \sum_s \varepsilon_s P_s = 0 \cdot P_0 + \varepsilon P_1 + 2\varepsilon P_2 = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon} + 2\varepsilon e^{-2\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}}$$

c) $T \gg \varepsilon/k_B$ dan $P_0 \approx P_1 \simeq P_2 \approx 1/3$ dus $E(T) = \frac{0+\varepsilon+2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ 3

7 $T \ll \varepsilon/k_B$ dan $P_0 \simeq 1$ en $P_2 = P_3 = 0$ dus $E(T) = 0$ 4