Tussentoets Statistische Fysica Theorie en Experiment, 7/10/2016, 13:30-15:30.
Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Motiveer uw antwoorden kort en bondig. Schrijf uw naam op elk vel. Calculator, boek, of bundel zijn niet toegestaan; een blauwe of zwarte pen volstaat (s.v.p. geen potlood). Elk van de 25 deelvragen is maximaal 4 punten waard (totaal 100), besteed dus tijd aan elke deelvraag. Succes!

1. We beschouwen een systeem van 9 deeltjes, waarbij elk deeltje ófwel in de grondtoestand zit met energie 0, ófwel in de aangeslagen toestand met energie $\epsilon > 0$.

   (a) Hoeveel microtoestanden heeft dit systeem?

   (b) Hoeveel microtoestanden heeft het systeem als gegeven is dat de totale energie gelijk is aan 3ϵ?

2. (a) Leid af dat
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha} \text{ voor } \alpha > 0. \tag{1}$$

   (b) Bereken
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 \exp(-x^2). \tag{2}$$

   (c) Een variabele x is Gaussisch verdeeld met gemiddelde 2 en variantie 2. Geef de goed-genormeerde kansverdeling van x.

   (d) Leid kort af dat
$$\ln(n!) \simeq n \ln n - n \text{ voor } n \gg 1. \tag{3}$$

3. Het aantal deeltjes n in een deelvolume van een gas voldoet aan de kansverdeling $P(n) = e^{-3}3^n/n!$.

   (a) Bereken het gemiddeld aantal deeltjes in dit deelvolume.

   (b) Bereken de standaard deviatie van n.

   (c) Als het gas lucht is bij kamertemperatuur op atmosfersiche druk, is het deelvolume dan van de orde van een (i) nm^3, (ii) $\mu\mathrm{m}^3$, (iii) mm^3, of (iv) m^3? Beargumenteer uw antwoord kort.

4. Beschouw een ijl gas van N identieke deeltjes in een volume V op temperatuur T. De deeltjesmassa is m, de snelheid van een deeltje noemen we $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, en de (botsings)straal van de deeltjes noemen we b.

   (a) Geef een uitdrukking voor de kansdichtheid $g(v_x)$.

   (b) Leid een uitdrukking af voor de gemiddelde kinetische energie van een deeltje $\langle \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \rangle$.

   (c) Leid een (benaderde) uitdrukking af voor de vrije weglengte λ van het gas.

   (d) Als het gas lucht betreft bij kamertemperatuur en atmosferische druk, geef dan numerieke waarden voor de orde van grootte van (i) $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, (ii) b, en (iii) λ.

— Z.O.Z. —

5. Beschouw een deeltje dat in *drie* mogelijke microtoestanden $s = -1, 0, 1$ kan zitten, ofwel in toestand $s = -1$ met energie $-\epsilon < 0$, ofwel in toestand $s = 0$ met energie 0, ofwel in toestand $s = 1$ met energie $\epsilon > 0$. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

   (a) Bereken de kansen P_s om toestand $s = -1, 0, 1$ aan te treffen.

   (b) Bereken de gemiddelde energie $E(T)$ van het deeltje.

   (c) Geef de hoge-T en lage-T limiet waarden van $E(T)$.

6. Beschouw een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes in een volume V op temperatuur T.

   (a) Geef een uitdrukking voor de energie $U(N, V, T)$ van dit gas.

   (b) Geef een uitdrukkig voor de door het gas opgenomen hoeveelheid warmte Q als dit gas isotherm en reversibel uitzet van het beginvolume V tot een eindvolume $5V$.

   (c) Bereken de hoeveelheid warmte Q die aan het gas moet worden toegevoerd om een adiabatische volumeverandering van V naar $2V$ te bewerkstelligen.

7. Beschouw de differentiaal $df \equiv 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ voor reële x, y. Bereken $\oint df$ over een gesloten kromme in het (x, y)-vlak.

8. Een warmtemachine neemt een hoeveelheid warmte $Q > 0$ op uit een warmtebad op temperatuur T en levert hiermee een hoeveelheid arbeid $W = \frac{3}{4}Q$. De machine dumpt gedurende dit proces tevens een hoeveelheid restwarmte Q' in een koud warmtebad.

   (a) Bereken Q'.

   (b) Bereken (met motivatie) de hoogst-mogelijke temperatuur T_k van het koude bad.

9. Drie "up/down" spindeeltjes met microtoestanden $s_i = \pm 1$ voor $i = 1, 2, 3$ hebben vanwege onderlinge wisselwerkingen een energie $\epsilon_{s1,s2,s3} = -J(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)$ met $J > 0$ een bekend verondersteld parameter. De totale magnetisatie is gedefinieerd als $M = (s_1 + s_2 + s_3)$. De deeltjes zijn in thermisch contact met een warmtebad op temperatuur T. De kans om magnetisatie M aan te treffen noemen we $W(M)$.

   (a) Geef de microtoestand(en) met de laagste energie.

   (b) Bereken $W(3)$ en $W(1)$ en schets ze in één plotje als functie van T.

   (c) Interpreteer uw resultaat van (b) in een paar woorden.

——— EINDE ———