

Tentamen **Statistische Fysica**, woensdag 4 november 2015, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen. Besteed aandacht aan alle onderdelen en schrijf met zwarte of blauwe pen. Aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn *niet* toegestaan. Succes!

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T , de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, en $\beta = 1/(k_B T)$. De elementaire lading is $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, de protonmassa is $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, en de gas constante is $R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5 Pa .

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

We beschouwen een homogeen klassiek gas van N identieke deeltjes met massa m in een drie-dimensionaal volume V op temperatuur T . De kinetische energie van een deeltje met snelheid $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ is dus gelijk aan $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Het gas is in thermodynamisch evenwicht.

- Geef de goed genormeerde waarschijnlijkheidsverdeling $W(\mathbf{v})$ van de deeltjessnelheid \mathbf{v} en bereken de gemiddelde kinetische energie van een deeltje.
- Geef, voor het geval van stikstofgas (N_2) bij kamertemperatuur en atmosferische druk, de orde van grootte van de standaard deviatie van $W(\mathbf{v})$ en een schatting voor de typische afstand tussen twee naburige molekulen.

We nemen nu aan dat het een ideaal gas betreft, dus de druk is $p = Nk_B T/V$. De gemiddelde energie van het gas is $U = (f/2)Nk_B T$ met f een (bekende veronderstelde) positieve constante.

- Geef f voor puntdeeltjes, geef kort aan waarom f voor een moleculair gas hiervan kan afwijken, en bereken de warmtecapaciteit C_p van dit gas bij constante druk.
- Bereken de opgenomen hoeveelheid warmte Q als het gas reversibel en isotherm uitzet van een beginvolume V naar een eindvolume $5V$, bij vaste N .
- Bereken de verhouding T_e/T_b van de eindtemperatuur T_e en de begintemperatuur T_b als het gas bij vaste N reversibel en adiabatisch uitzet van een beginvolume V naar een eindvolume αV met $\alpha > 1$.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

We beschouwen een enkel deeltje in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T . Het deeltje heeft 3 microtoestanden $s = 0, 1, 2$ met energieën ϵ_s gegeven door $\epsilon_0 = 0$ en $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon > 0$.

- Bereken de kanonieke partitiesom $Z(T)$ en de Helmholtz vrije energie $F(T)$ van dit deeltje.
- Bereken de kans P om dit deeltje met energie ϵ aan te treffen.
- Bereken eerst de gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje en geef dan op basis van fysische argumenten (of bereken) de lage- T limiet van $u(T)$.

We beschouwen nu $N \gg 1$ van dit soort deeltjes, elk “vastgeprikt” op een roosterpunt. De deeltjes wisselwerken niet met elkaar.

- Bereken de kanonieke partitiesom $Z_N(T)$.
- Bereken de entropie $S(N, T)$ van dit N -deeltjes systeem en geef op basis van fysische argumenten (of bereken) de hoge- T limiet ($k_B T \gg \epsilon$) van $S_N(T)$.

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

We beschouwen een thermodynamisch systeem met energie U , entropie S , volume V , temperatuur T en druk p . Het aantal deeltjes is N en de chemische potentiaal is μ .

- Druk de differentiaal dG van de Gibbs vrije energie $G(N, p, T)$ uit in termen van de gegeven grootheden.
- Bewijs, wellicht m.b.v. een Maxwell relatie en/of een “reciprocal relation” en/of een “reciprocity relation”, dat $(\partial p/\partial T)_V = -(\partial S/\partial T)_V(\partial T/\partial V)_S$.
- Bereken $p(T)$ voor het geval dat $U(S, V) = cS^{3/2}/V^{1/2}$ met $c > 0$ een constante. Beargumenteer waarom p intensief dan wel extensief dan wel (geen van) beide is.

We beschouwen nu een reversibele warmtemachine die gedurende een cyclus een hoeveelheid arbeid W verricht door een hoeveelheid warmte $Q_h > 0$ op te nemen uit een heet bad op temperatuur T_h en een hoeveelheid warmte $Q_k > 0$ te dumpen in een koud bad op temperatuur $T_k < T_h$. Verder vindt geen warmteuitwisseling plaats.

- Geef, met argumentatie, de efficiëntie W/Q_h van deze machine.
- We nemen nu aan dat de machine een Carnot machine is, en dat geleidelijk het koude bad opwarmt terwijl het warme bad afkoelt wanneer de motor draait. Bereken de gezamenlijke eindtemperatuur T_e van de twee baden voor het geval dat de warmtecapaciteit van het koude bad twee maal zo groot is als die van het warme bad.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

We beschouwen een simpel model van een vloeistofdruppel van N klassieke identieke puntdeeltjes in een 3-dimensionaal volume V op temperatuur T . Elk vloeistofdeeltje heeft een potentiële energie $-\epsilon$ als gevolg van de nabijheid van andere deeltjes in de vloeistofdruppel, ongeacht de positie \mathbf{r}_i van het deeltje in de druppel. Er geldt $\epsilon > 0$, en $i = 1, 2, \dots, N$ is een label voor de deeltjes. De kanonieke partitiesom wordt gegeven door

$$Z(N, V, T) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_V d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N \exp[-\beta \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i^2/(2m) - \epsilon)],$$

met h de constante van Planck, m de massa van een deeltje, en \mathbf{p}_i de impuls van deeltje i .

- Verklaar kort de voorfactor $1/N!$, geef de grenzen van de impulsintegraties, en laat zien dat $Z(N, V, T) = \exp[\beta\epsilon N]V^N/(N!\Lambda^{3N})$. Bereken Λ , en geef de dimensie van Λ .
- Bereken de Helmholtz vrije energie $F(N, V, T)$ en de chemische potentiaal $\mu(N, V, T)$ van de vloeistof; maak hierbij gebruik van de Stirling formule. Zijn F en μ extensief of intensief?

We beschouwen een twee-dimensionaal oppervlak met M posities waarop deeltjes kunnen adsorberen. Een positie is ófwel onbezet ófwel bezet door hoogstens één deeltje. De adsorptie op een positie beïnvloedt de adsorptie op naburige posities níet. Een geadsorbeerd deeltje bevindt zich slechts in één microtoestand met energie ϵ ; een onbezette adsorptie-positie heeft een energie gelijk aan nul.

- Bereken de groot-kanonieke partitie som $\mathcal{Z}_1(T, \mu)$ van een enkele adsorptie-positie in diffusief en thermisch evenwicht met een gas op temperatuur T en chemische potentiaal μ .
- Bereken het gemiddelde aantal geadsorbeerde gas-deeltjes $\langle N_{ad} \rangle$ als functie van M , T , en μ .

Beschouw een drie-dimensionaal systeem van identieke deeltjes met een gas-vloeistof kritiek punt bij temperatuur T_c , druk p_c , en volume-per-deeltje v_c .

- Schets in een enkele plot de druk p als functie van het volume-per-deeltje v voor een temperatuur (i) $T \gg T_c$, (ii) $T = T_c$, en (iii) $T < T_c$. Beargumenteer uw schetsen kort.