Tentamen **Statistische Fysica**, woensdag 8 november 2017, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven met elk 5 deelvragen. Met elke deelvraag kunnen 5 punten worden verdiend. Besteed aandacht aan alle onderdelen en schrijf met zwarte of blauwe pen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn *niet* toegestaan. Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. Succes!

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38\times10^{-23}$J/K, en $\beta = 1/(k_BT)$. De elementaire lading is $e = 1.6\times10^{-19}$C, de protonmassa is 1.67×10^{-27}kg het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa. Bovendien staat S voor entropie, U voor interne energie, p voor druk, V voor volume, N voor aantal deeltjes, en μ voor chemische potentiaal.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een gas van N identieke molekulen met massa m in een volume V op temperatuur T. De energie van een molekuul met lineaire impuls (p_x, p_y, p_x) and draai-impuls (L_x, L_y, L_z) is $\epsilon = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/m + \frac{1}{2}(L_x^2/I_x + L_y^2/I_y)$, met I_x en I_y de relevante traagheidsmomenten. De deeltjes gedragen zich klassiek (dus niet-kwantum en niet-relativistisch), er zijn geen onderlinge wisselwerkingen, en het gas is in thermodynamisch evenwicht.

(a) Geef de goed-genormeerde kansdichtheid $W(L_x)$ om een willekeurig molekuul met draai-impuls L_x aan te treffen.

(b) Bereken, of geef met argumenten, de interne energie $U(N, V, T)$ van het gas.

We beschouwen nu een ideaal gas van N deeltjes met warmtecapaciteit bij constant volume $C_V = fNk_B/2$ met $f > 0$ een gegeven positief geheel getal.

(c) Geef een interpretatie voor f en bereken de warmtecapaciteit bij constante druk C_p.

(d) Bereken de eindtemperatuur T_e van het gas als het adiabatisch expandeert van begintoestand (V, T) naar eindtoestand $(2V, T_e)$.

Beschouw een koper-zink (Cu-Zn) legering van N_1 Cu en N_2 Zn atomen op een defect-vrij rooster van $N \equiv N_1 + N_2$ roosterpunten zonder lege of meervoudig bezette roosterpunten.

(e) Laat zien dat de (meng-)entropie geschreven kan worden als $S = -Nk_B\big(x \ln x + (1-x)\ln(1-x)\big)$ met $x = N_1/N$.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een enkel deeltje dat in 6 microtoestanden (n, m) kan zitten met $n = 0, 1, 2$ en $m = 0, \cdots, n$. De energie in toestand (n, m) is $\epsilon_{n,m} = n\Delta$ met $\Delta > 0$. Het deeltje is in thermodynamisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Bereken de kans P om dit deeltje in de grondtoestand aan te treffen en de kans P' om het deeltje met energie 2Δ aan te treffen.

(b) Bereken de gemiddelde energie $u(T)$ en de entropie $s(T)$ van dit deeltje.

(c) Bereken, of geef met fysische argumentatie, de hoge-T en de lage-T limiet van zowel $u(T)$ als $s(T)$.

We beschouwen nu N van dergelijke deeltjes, alle op vaste roosterpunten en zonder onderlinge wisselwerking.

(d) Bereken, met argumentatie, de kanonieke partitiesom van dit N-deeltjes systeem op temperatuur T.

(e) Laat zien dat de standaard deviatie van de totale energie schaalt met $N^{1/2}$.

—ZIE OMMEZIJDE —

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
De enthalpie $H(S, p, N)$ van een thermodynamisch systeem van N deeltjes en entropie S op druk p voldoet aan $H = f(p)\sqrt{SN}$ met $f(p)$ een of andere (bekend verondersteld) intensieve functie van de druk p.

(a) Bereken de chemische potentiaal $\mu(p, T)$ als functie van de temperatuur T en druk p. Motiveer of uw resultaat voor μ intensief, extensief, beide, of geen van beide is.

(b) Gedurende een reversibel isobaar proces, tevens bij vaste N, verricht het systeem een hoeveelheid arbeid W terwijl een hoeveelheid warmte Q wordt toegevoerd. Wat is de enthalpie verandering ΔH van dit systeem?

We beschouwen nu een condensator bestaande uit twee electroden met lading q en $-q$ en potentiaalverschil ψ, zodat de Eerste Hoofdwet nu luidt $dU = TdS + \psi dq$.

(c) Construeer een Legendre transformatie naar de Helmholtz vrije energie $F(T, q)$ en leid een Maxwell relatie af uit dF.

(d) Bereken de entropie-verandering ΔS bij isotherme oplading vanuit ongeladen toestand ($q = 0$) tot $q > 0$ voor het geval dat $\psi = bTq$ (dus de ladingscapaciteit is $q/\psi = 1/bT$ met $b > 0$ een constante).

We beschouwen nu een *afgesloten* systeem bestaande uit twee deelsystemen, een"reservoir" met energie U_r en entropie $S_r(U_r)$ en het sub-systeem van interesse (hierna "systeem" genoemd) met energie U en entropie $S(U)$. De deelsystemen kunnen alleen energie uitwisselen, dus geen deeltjes of volume.

(e) Gebruik de Eerste en Tweede Hoofdwet om te laten zien dat in thermodynamisch evenwicht (i) de temperaturen van reservoir en systeem gelijk zijn, en (ii) de combinatie $U - TS(U)$ minimaal is indien $U_r \gg U$. Geef voor geval (ii) tevens een uitdrukking voor T.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen identieke edelgas atomen, zeg Argon, in een volume V bij temperatuur T. De druk noemen we p en $\beta^{-1} = k_B T$.

(a) Schets, in twee aparte figuren, (i) de interactie-potentiaal $\mathcal{V}(r)$ tussen twee Argon-atomen op kern-kern afstand r van elkaar, en (ii) het fasendiagram inclusief de aggregatietoestanden in het (T, p) vlak.

De partitiesom voor N Argon atomen benaderen we als $Z(N, V, T) = (1/N!)(V - Nb)^N \exp(\beta a N^2/V)/\Lambda^{3N}$ met a en b constanten en $\Lambda = h(2\pi m k_B T)^{-1/2}$ met m de massa van een Argon atoom.

(b) Verklaar en/of beargumenteer in een paar woorden de aanwezigheid van (i) de factor $1/N!$ en (ii) de thermische golflengte Λ. Geef ook de fysische betekenis van (iii) a en (iv) b.

(c) Bereken de druk $p(\rho, T)$ met $\rho = N/V$, en schets vervolgens p als functie van $\rho \in [0, 1/b]$ voor een sub-kritieke temperatuur $T < T_c \equiv 8a/27bk_B$.

We beschouwen nu een gas op temperatuur T en chemische potentiaal μ. Het gas kan adsorberen op een oppervlak, zodanig dat een adsorptie-plek ofwel onbezet is met energie nul, ofwel enkelvoudig bezet is met energie ϵ_1, ofwel tweevoudig bezet is met energie ϵ_2.

(d) Bereken de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}(\mu, T)$ van een adsorptieplek.

(e) Bereken zo expliciet mogelijk het gemiddeld aantal geadsorbeerde deeltjes per adsorptieplek.

—EINDE —