

Tussentoets Statistische Fysica Theorie en Experiment, 6/10/2016, 13:30-15:30.

Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Motiveer uw antwoorden kort en bondig. Schrijf uw naam op elk vel. Calculator, boek, of bundel zijn niet toegestaan; een blauwe of zwarte pen volstaat (s.v.p. geen potlood). Elk van de 20 deelvragen is maximaal 5 punten waard (totaal 100), besteed dus tijd aan elke deelvraag. Succes!

1. (a) Leid af dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha} \text{ voor } \alpha > 0. \quad (1)$$

- (b) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp(-2x^2). \quad (2)$$

- (c) Een variabele x is Gaussisch verdeeld met gemiddelde 3 en variantie 2. Geef de goed-genormeerde kansverdeling van x .

2. Beschouw een (reële) variabele x die voldoet aan de kansverdeling $p(x) = 1 - |x|$ voor $x \in [-1, 1]$ en $p(x) = 0$ voor $|x| > 1$.

- (a) Bereken de standaard deviatie σ_x van x .

- (b) Als $y = x_1 + x_2 + x_3$ met x_i verdeeld als $p(x_i)$, geef dan de standaard deviatie σ_y .

3. We beschouwen een afgesloten systeem van N deeltjes in thermodynamisch evenwicht, waarbij elk deeltje ófwel in de grondtoestand zit met energie 0, ófwel in de aangeslagen toestand met energie $\epsilon > 0$. We nemen N even. De totale energie is $N\epsilon/2$.

- (a) Hoeveel (realiseerbare) microtoestanden heeft dit systeem?

- (b) Voor $N=10$ beschouwen we twee microtoestanden, de "geordende" microtoestand 0000011111 en de "random" microtoestand 0101100011. Welke van de twee is waarschijnlijker?

4. Beschouw een ijl gas van N identieke deeltjes met diameter d in een volume V op temperatuur T . De deeltjesmassa is m , en de snelheid van een deeltje noemen we $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

- (a) Geef een uitdrukking voor de kansdichtheid $g(v_x)$.

- (b) Leid een uitdrukking af voor de gemiddelde kinetische energie van een deeltje ($\frac{1}{2}mv^2$).

- (c) Leid een (benaderde) uitdrukking af voor de vrije weglengte λ van het gas.

- (d) Als het gas lucht betreft bij kamertemperatuur en atmosferische druk, geef dan numerieke waarden voor de orde van grootte van (i) $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, (ii) d , en (iii) λ .

5. Beschouw een deeltje dat in drie mogelijke microtoestanden $s = 0, 1, 2$ kan zitten met energie $\epsilon_s = \epsilon s^2$, dus ófwel in toestand $s = 0$ met energie 0, ófwel in toestand $s = 1$ met energie $\epsilon > 0$, ófwel in toestand $s = 2$ met energie 4ϵ . Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T .

- (a) Bereken de kansen P_s om toestand $s = 0, 1, 2$ aan te treffen.

- (b) Bereken de gemiddelde energie $U(T)$ van het deeltje.

- (c) Geef de hoge- T en lage- T limiet waarden van $U(T)$, ófwel door berekening ófwel op basis van fysische argumenten.

— Z.O.Z. —

6. Beschouw een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes in een volume V op temperatuur T . Er geldt dus $U = (3/2)Nk_B T$ met U de energie van het gas en k_B de constante van Boltzmann.
- Geef een uitdrukking voor de door het gas opgenomen hoeveelheid warmte ΔQ als dit gas isotherm en reversibel uitzet tot een volume $2V$.
 - Bereken de hoeveelheid warmte ΔQ die aan het gas moet worden toegevoerd om een adiabatische volumeverandering van V naar $3V$ te bewerkstelligen.
7. Een ingenieur presenteert een ontwerp van een warmtemachine die een hoeveelheid warmte $Q > 0$ opneemt uit een warmtebad op een temperatuur van 40°C . Hiervan wordt de helft gebruikt om arbeid te leveren terwijl de andere helft als restwarmte in een rivier van 10°C geloosd wordt. Voldoet dit ontwerp aan de Eerste en/of de Tweede Hoofdwet van de Thermodynamica, aan allebei of aan geen van beiden? Beargumenteer uw antwoord kort.
8. Drie "up/down" spindeeltjes met microtoestanden $s_i = \pm 1$ voor $i = 1, 2, 3$ hebben vanwege onderlinge wisselwerkingen tussen spin 1 en spin 2 en tussen spin 2 en spin 3 een energie $\epsilon_{s_1, s_2, s_3} = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3)$ met $J > 0$ een bekend veronderstelde parameter; spin 1 en spin 3 hebben dus geen onderlinge wisselwerking. De totale magnetisatie is gedefinieerd als $M = (s_1 + s_2 + s_3)$. De deeltjes zijn in thermisch contact met een warmtebad op temperatuur T . De kans om magnetisatie M aan te treffen noemen we $W(M)$.
- Geef de microtoestand(en) met de laagste energie.
 - Bereken $W(3)$, $W(1)$, $W(-1)$, en $W(-3)$ en schets ze in één plotje als functie van T . Geef duidelijk aan welke curve bij welke T hoort.
 - Interpreteer uw resultaat bij (b) in een paar woorden.

———— EINDE ————