Tussentoets Statistische Fysica Theorie en Experiment, 28/09/2018, 13:30-15:30.
Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Motiveer uw antwoorden kort en bondig. Schrijf uw naam op elk vel. Calculator, boek, of bundel zijn niet toegestaan; een blauwe of zwarte pen volstaat (s.v.p. geen potlood). Elk van de 20 deelvragen is maximaal 5 punten waard (totaal 100), besteed dus tijd aan elke deelvraag. Succes!

1. (a) Leid af dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha} \text{ voor } \alpha > 0. \tag{1}$$

   (b) Bereken

$$\int_{0}^{\infty} dx\, x^2 \exp(-x^2). \tag{2}$$

   (c) Een variabele x is Gaussisch verdeeld met gemiddelde 2 en variantie 3. Geef de goed-genormeerde kansverdeling van x.

2. Beschouw een (reële) variabele x die voldoet aan de kansverdeling $p(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ voor $x \in [-1, 1]$ en $p(x) = 0$ voor $|x| > 1$.

   (a) Laat zien dat $p(x)$ correct genormeerd is.

   (b) Bereken de standaard deviatie σ_x van x.

   (c) Als $y = x_1 + x_2$ met x_i verdeeld als $p(x_i)$, geef dan de standaard deviatie σ_y van y.

3. Beschouw een wandelaar die elke seconde ofwel een stap voorwaarts zet ofwel een stap terug op een 1-dimensionale lijn. De stapgrootte is steeds 1 meter. Het totaal aantal stappen (of het aantal seconden dat de wandeling duurt) noemen we N, en het aantal mogelijke paden om na N stappen een netto verplaatsing van M meters te realiseren noemen we $\Omega_N(M)$.

   (a) Bereken $\Omega_N(M)$.

   De kans op een voorwaartse stap van de wandelaar is een bekend verondersteld $p \in [0, 1]$, en dus is de kans op een stap terug $1 - p$.

   (b) Bereken voor één stap, dus voor $N = 1$, de gemiddelde verplaatsing $\langle M \rangle$, de gemiddelde kwadratische verplaatsing $\langle M^2 \rangle$, en de standaard deviatie σ_M.

   (c) Bereken $\langle M \rangle$ en σ_M voor een wandeling van N (onafhankelijke) stappen.

4. Geef een voorbeeld van (i) een extensieve grootheid, (ii) een intensieve grootheid, en (iii) een multiplicatieve grootheid van een thermodynamisch systeem.

——— Z.O.Z. ———

5. Beschouw een ijl gas van N identieke deeltjes met diameter d in een volume V op temperatuur T. De deeltjesmassa is m, en de snelheid van een deeltje noemen we $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

   (a) Bereken of geef de kansdichtheid $g(v_x)$.

   (b) Leid een uitdrukking af voor de gemiddelde kinetische energie van een deeltje $\langle \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \rangle$.

   (c) Leid een (benaderde) uitdrukking af voor de vrije weglengte λ van het gas.

   (d) Als het gas lucht ($m \simeq 10^{-26}$kg) betreft bij kamertemperatuur en atmosferische druk, geef dan numerieke waarden voor de orde van grootte van (i) $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, (ii) d, en (iii) λ.

6. Beschouw een deeltje dat in *vier* mogelijke microtoestanden $s = 0, 1, 2, 3$ kan zitten met energie $\epsilon_s = \epsilon s$, dus ofwel in toestand $s = 0$ met energie 0, ofwel in toestand $s = 1$ met energie $\epsilon > 0$, ofwel in toestand $s = 2$ met energie 2ϵ, ofwel in toestand $s = 3$ met energie 3ϵ. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

   (a) Geef de kansen P_s om toestand $s = 0, 1, 2, 3$ aan te treffen.

   (b) Geef een uitdrukking voor de gemiddelde energie $U(T)$ van het deeltje in termen van Boltzmann factoren van de microtoestanden.

   (c) Geef de hoge-T en lage-T limiet waarden van $U(T)$, ofwel door berekening ofwel op basis van fysische argumenten.

7. Beschouw een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes in een volume V op temperatuur T. Er geldt dus $U = (3/2)Nk_BT$ met U de energie van het gas en k_B de constante van Boltzmann. Het aantal deeltjes is vast.

   (a) Motiveer waarom de energieverandering dU voldoet aan $dU = -(Nk_BT/V)dV + \delta Q$ indien het gas onder opname van een kleine hoeveelheid warmte δQ een kleine volumeverandering dV ondergaat.

   (b) Bereken het eindvolume V_e als het gas isotherm en reversibel uitzet vanuit beginvolume V_b onder opname van een eindige hoeveelheid warmte ΔQ.

   (c) Bereken de hoeveelheid warmte ΔQ die aan het gas moet worden toegevoerd om een adiabatische volumeverandering van V naar $3V$ te bewerkstelligen.

—— EINDE ——