

## Uitwerking<sup>1</sup> Thermische fysica 1 (TF1) 3 juli 2001

### Opgave 1

- a) Voor een ideaal gas geldt  $PV = NkT$  en dus  $U = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}PV$ . We hebben een monoatomair gas, dus  $f = 3$  (alleen de drie richtingen in de ruimte, geen trillingsvrijheden), dus

$$\Delta U = U_D - U_A = \frac{3}{2}(P_1V_2 - P_2V_1)$$

- b) De geleverde arbeid  $W = -\int PdV$ , dus

$$\begin{aligned} W_{ACD} &= -P_1(V_2 - V_1) \\ W_{ABD} &= -P_2(V_2 - V_1) \\ W_{\text{adiabaat}} &= -\int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^\gamma} dV = -\int_{V_1}^{V_2} P_2V_1^{5/3}V^{-5/3}dV \\ &= -P_2V_1^{5/3} \cdot \left. -\frac{3}{2}V^{-2/3} \right|_{V_1}^{V_2} = \frac{3}{2}P_2V_1^{5/3} (V_2^{-2/3} - V_1^{-2/3}) \\ &= \frac{3}{2}P_2V_1 \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \end{aligned}$$

- c) Het entropieverschil tussen toestand A en D kunnen we het makkelijkst berekenen langs de adiabaat tussen deze twee toestanden, want daarvoor geldt  $Q = 0$  en daarmee  $\Delta S = \frac{Q}{T} = 0$ . We kunnen  $S_A - S_B$  uitrekenen langs de weg B naar A ( $P$  constant) en langs B via D ( $V$  constant) naar A (adiabaat).

Het eerste geeft met de thermodynamische identiteit

$$\begin{aligned} S_A - S_B &= \int_{V_2}^{V_1} \frac{dU + PdV}{T} \\ &= \int_{V_2}^{V_1} \frac{\frac{\partial U}{\partial V} + P}{T} dV \\ &= \int_{V_2}^{V_1} \frac{\frac{f}{2}P + P}{\frac{PV}{Nk}} dV \\ &= Nk \left( \frac{f}{2} + 1 \right) \int_{V_2}^{V_1} \frac{1}{V} dV \\ &= Nk \frac{5}{2} \log \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \end{aligned}$$

En de tweede geeft met behulp van  $S_D - S_A = 0$

$$S_A - S_B = (S_A - S_D) + (S_D - S_B) = S_D - S_B$$

---

<sup>1</sup>Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de  $\mathcal{TBC}$  niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: [tbc@A-Eskwadraat.nl](mailto:tbc@A-Eskwadraat.nl)

$$\begin{aligned}
&= \int_{P_2}^{P_1} \frac{dU + PdV}{T} \\
&= \int_{P_2}^{P_1} \frac{\frac{\partial U}{\partial P}}{T} dP \\
&= \int_{P_2}^{P_1} \frac{\frac{f}{2}V}{\frac{PV}{Nk}} dP \\
&= Nk \frac{f}{2} \int_{P_2}^{P_1} \frac{1}{P} dP \\
&= Nk \frac{3}{2} \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right)
\end{aligned}$$

Aangezien het proces tussen A en D adiabatisch was, weten we dat daarvoor geldt  $PV^{\frac{5}{3}} = C$ , dus  $P_2 V_1^{\frac{5}{3}} = P_1 V_2^{\frac{5}{3}}$ , dus

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{5}{3}} = \frac{P_1}{P_2}$$

dit invullen in het tweede resultaat geeft dan

$$\begin{aligned}
&Nk \frac{3}{2} \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \\
&= Nk \frac{3}{2} \log \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{5}{3}} \right) \\
&= Nk \frac{3}{2} \frac{5}{3} \log \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \\
&= Nk \frac{5}{2} \log \left( \frac{V_1}{V_2} \right)
\end{aligned}$$

Dus voor deze beide wegen is de entropieverandering hetzelfde en dit is in overeenstemming met het feit dat de entropie een toestandsgrrootheid is.

## Opgave 2

- a) Voor gegeven energie  $U = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2$  met  $n_1 + n_2 = N$  kunnen we deze op  $\binom{N}{n_1}$  verschillende manieren achter elkaar plaatsen (want we moeten  $n_1$  van totaal  $N$  plaatsen kiezen waar we een molecuul in toestand 1 zetten) en verder volgt voor  $n_1$  en  $n_2$

$$n_1 = \frac{U - \epsilon_2 N}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \quad n_2 = \frac{U - \epsilon_1 N}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

Nu

$$\Omega(U, N) = \binom{N}{n_1} = \binom{N}{\frac{U - \epsilon_2 N}{\epsilon_1 - \epsilon_2}}$$

en daarmee

$$\begin{aligned}
S &= k \ln \Omega(U, N) = k \log \binom{N}{n_1} \\
&\approx k \left( N \log N - N - n_1 \log n_1 + n_1 - (N - n_1) \log(N - n_1) + (N - n_1) \right) \\
&= k \left( N \log N - n_1 \log n_1 - (N - n_1) \log(N - n_1) \right)
\end{aligned}$$

b) Er geldt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial U_{V,N}} \\
 &= \frac{\partial S}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial U} \\
 &= k \frac{\partial n_1}{\partial U} \left[ -1 - \log n_1 + 1 + \log(N - n_1) \right] \\
 &= k \frac{\partial \frac{U - \epsilon_1 N}{\epsilon_1 - \epsilon_2}}{\partial U} \log \left( \frac{N - n_1}{n_1} \right) \\
 &= \frac{k}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \log \left( \frac{N}{n_1} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Dit omrekenen naar  $L(T)$  geeft met  $L = n_1 a + n_2 b = n_1(a - b) + Nb$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} &= \frac{-k}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \log \left( \frac{N}{\frac{L - Nb}{a - b}} - 1 \right) \\
 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} &= \log \left( \frac{(a - b)N}{L - Nb} - 1 \right) \\
 \exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) &= \frac{(a - b)N}{L - Nb} - 1 \\
 (L - Nb) \left[ \exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) + 1 \right] &= (a - b)N \\
 L \left[ \exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) + 1 \right] &= aN + bN \exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) \\
 L &= \frac{aN + bN \exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right)}{\exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) + 1}
 \end{aligned}$$

c) Voor  $T \rightarrow 0$  gaat  $\exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right)$  naar 0 of oneindig afhankelijk van het teken van  $\epsilon_1 - \epsilon_2$ , dus dan gaat  $L$  naar  $aN$  of  $bN$  en wel diegene met de laagste bijbehorende energie  $\epsilon$ .

Voor  $T \rightarrow \infty$  gaat de keten in de macro-toestand met de grootste multipliciteit, dus  $n_1 = n_2 = \frac{N}{2}$  en  $L = N \frac{a+b}{2}$ . Als je de limiet invult krijg je ook  $\exp \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{kT} \right) = 1$  dus  $L = \frac{aN + bN}{1+1}$ .

### Opgave 3

a) Er geldt  $Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = c_1 T_1 + c_2 T_2$  en  $c_{\text{tot}} = c_1 + c_2$ , dus

$$T_f = \frac{Q_{\text{tot}}}{c_{\text{tot}}} = \frac{c_1 T_1 + c_2 T_2}{c_1 + c_2}$$

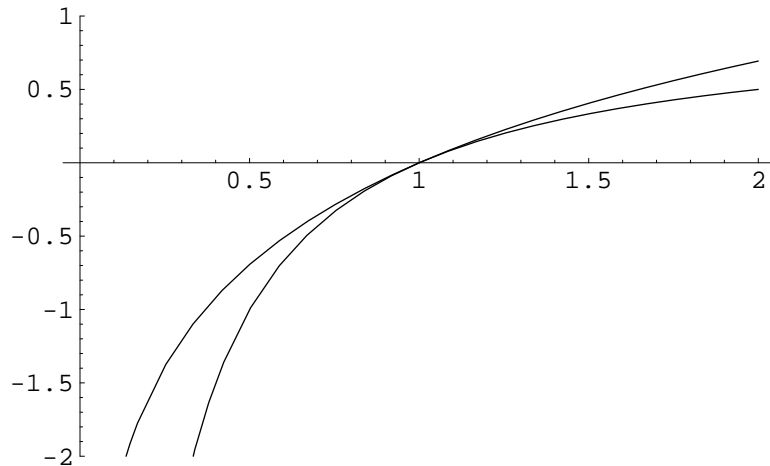
b) Er stroomt warmte van hoge naar lage temperatuur en voor één systeem is de entropieverandering  $dS = \frac{dQ}{T}$ , dus voor een kleine hoeveelheid uitgewisselde warmte  $dQ$ :

$$dS_{\text{tot}} = \left| \frac{dQ}{T_1} - \frac{dQ}{T_2} \right|$$

Aangezien tijdens het uitwisselen van warmte de temperatuur ook verandert, moeten we de entropieverandering integreren over de hoeveelheid uitgewisselde warmte en  $T_1(Q) = T_1 + \frac{Q}{c_1}$ ,  $T_2(Q) = T_2 - \frac{Q}{c_2}$ , dus

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int_0^{Q_{\text{tot}}} \frac{1}{T_1(Q)} - \frac{1}{T_2(Q)} dQ \\
&= \int_0^{Q_{\text{tot}}} \frac{1}{T_1 + \frac{Q}{c_1}} - \frac{1}{T_2 - \frac{Q}{c_2}} dQ \\
&= \int_0^{Q_{\text{tot}}} \frac{1}{T_1} \frac{1}{1 + \frac{Q}{c_1 T_1}} - \frac{1}{T_2} \frac{1}{1 - \frac{Q}{c_2 T_2}} dQ \\
&= c_1 \log \left( 1 + \frac{Q}{c_1 T_1} \right) + c_2 \log \left( 1 - \frac{Q}{c_2 T_2} \right) \Big|_0^{Q_{\text{tot}}} \\
&= c_1 \log \left( 1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1 T_1} \right) + c_2 \log \left( 1 - \frac{Q_{\text{tot}}}{c_2 T_2} \right) \\
&\geq c_1 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1 T_1}} \right) + c_2 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_2 T_2}} \right) \\
&= c_1 \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1}} \right) + c_2 \left( 1 - \frac{T_2}{T_2 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_2}} \right) \\
&= c_1 \left( 1 - \frac{T_1}{T_f} \right) + c_2 \left( 1 - \frac{T_2}{T_f} \right) \\
&= (c_1 + c_2) - \frac{c_1 T_1 + c_2 T_2}{T_f} \\
&= (c_1 + c_2) - (c_1 + c_2) = 0
\end{aligned}$$

Verder is in figuur 1 te zien dat de afchatting  $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$  strikt is als  $x \neq 0$  en dat komt overeen met  $Q_{\text{tot}} \neq 0$ , oftewel als  $T_1 \neq T_2$ .



Figuur 1: Grafieken van  $\log(x)$  en  $1 - \frac{1}{x}$

c) Als  $c_2 \gg c_1$  dan volgt voor de eindtemperatuur

$$T_f = \frac{c_1 T_1 + c_2 T_2}{c_1 + c_2} \approx \frac{c_2 T_2}{c_2} = T_2$$

dus de eindtemperatuur is de temperatuur van het warmtebad.

Voor de entropieverandering volgt

$$\begin{aligned}\Delta S &= c_1 \log \left( 1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1 T_1} \right) + c_2 \log \left( 1 - \frac{Q_{\text{tot}}}{c_2 T_2} \right) \\ &\approx c_1 \log \left( 1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1 T_1} \right) - c_2 \frac{Q_{\text{tot}}}{c_2 T_2} \\ &= c_1 \log \left( 1 + \frac{Q_{\text{tot}}}{c_1 T_1} \right) - \frac{Q_{\text{tot}}}{T_2}\end{aligned}$$

dus hier is ook te zien dat de temperatuurverandering van het warmtebad te verwaarlozen is en  $\Delta S_2 = \frac{Q_{\text{tot}}}{T_2}$ .