

## Thermische Fysica 1 (NS-201b) 2 februari 2005

Net als in het boek en het college wordt in dit tentamen met  $T$  de absolute temperatuur bedoeld (in Kelvin), en met  $\tau = k_B T$  de fundamentele temperatuur (in Joule). Hier is  $k_B$  de constante van Boltzmann. Ook noemen we de thermodynamische entropie  $S$  (in Joule/Kelvin), en de dimensieloze entropie is  $\sigma = S/k_B$ . U mag uw eigen voorkeur (per vraag) aanpassen.

### Opgave 1

(35 punten)

We beschouwen een systeem van  $N$  identieke deeltjes op vaste posities in een regelmatig rooster. Elk deeltje kan in 2 toestanden zitten, ofwel in de grondtoestand met energie  $-\epsilon$ , ofwel in de aangeslagen toestand met energie  $+\epsilon$ . Er geldt dat  $\epsilon > 0$ , er zijn geen onderlinge wisselwerkingen tussen de deeltjes, en  $N \gg 1$ .

a) Geef twee fysische systemen die door dit model beschreven worden.

b) Wat is het totaal aantal microtoestanden van dit systeem?

We nemen nu aan dat het systeem thermisch geïsoleerd is, met een gegeven energie  $U = n\epsilon$ , met  $n = N_+ - N_-$ . Hier is  $N_-$  het aantal deeltjes in de grondtoestand, en  $N_+ = N - N_-$  het aantal deeltjes in de aangeslagen toestand.

c) Bereken de multipliciteit  $g(N, n)$  en m.b.v. de Stirling benadering de entropie  $\sigma(N, n)$ . Geef aan voor welke waarde(n) van  $n/N$  de entropie maximaal en minimaal is, respectievelijk.

d) Geef aan hoe u de temperatuur  $\tau(N, n)$  zou berekenen (u hoeft de berekening dus niet uit te voeren).

De thermische isolatie wordt nu verwijderd, en het systeem wordt vervolgens in thermische evenwicht gebracht met een warmtebad op temperatuur  $\tau$ . Het aantal deeltjes blijft onveranderd  $N$ .

e) Bereken de kanonieke 1-deeltjes partitiesom  $Z_1(\tau)$ .

f) Bereken de kans  $P_-$  dat een gegeven deeltje zich in de grondtoestand bevindt, en ook de kans  $P_+$  dat het deeltje zich in de aangeslagen toestand bevindt. Zorg voor een goede normering van de kansverdeling!

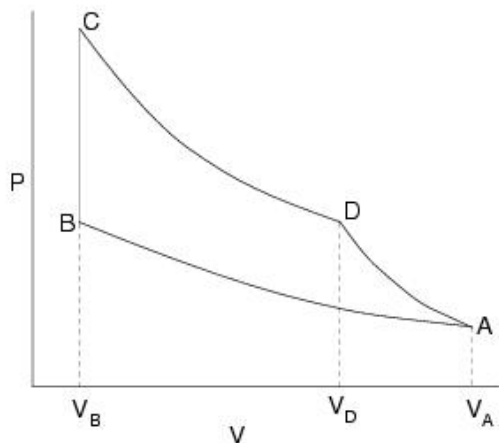
g) Bereken de gemiddelde energie  $U$  van het systeem als functie van  $N$  en  $\tau$ , en schets  $U$  voor  $\tau \in [0, \infty)$ . Geef op de  $\tau$ -as de waarde  $\epsilon$  aan, en op de  $U$ -as de hoge- $\tau$  en lage- $\tau$  limietwaarden aan van  $U$ . Bespreek kort waarom deze limietwaarden fysisch (on)redelijk zijn.

h) We beschouwen nu het geval  $\epsilon = 0$ , maar de deeltjes wisselwerken wél met elkaar. De interactie vindt alleen plaats tussen buurdeeltjes op het rooster, en is zodanig dat twee naburige deeltjes in dezelfde 1-deeltjes toestand een energie  $-J$  hebben, en een energie  $+J$  indien ze in verschillende toestanden zitten. We nemen  $J > 0$ . Beschrijf in een paar woorden de macroscopische toestand van het systeem voor (1)  $\tau \gg J$  en (2)  $\tau \ll J$ . Schets ook de  $\tau$ -afhankelijkheid van  $N_- - N_+$ .

### Opgave 2

(35 punten)

We beschouwen een klassiek ideaal gas van  $N$  puntdeeltjes, dat het kringproces  $ABCD A$  ondergaat zoals aangegeven in het onderstaande volume-druk ( $V - p$ ) diagram.



De begintoestand is  $A$  (met volume  $V_A$  en temperatuur  $T_A$ ), en de deelprocessen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$  worden gegeven door

- (AB) een isotherme compressie van  $V_A$  naar  $V_B$ ;
- (BC) een temperatuurverhoging tot  $T_C$  bij constant volume;
- (CD) een isotherme expansie tot een volume  $V_D$ ;
- (DA) een adiabetische expansie tot in toestand  $A$ .

Alle processen worden quasi-statisch (langzaam, reversibel) uitgevoerd, en het aantal deeltjes blijft onveranderd  $N$ .

- a) Geef de drukken  $p_A$  en  $p_B$  in de toestanden  $A$  en  $B$ , respectievelijk, als functie van  $T_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  en  $N$ .
- b) Geef de energie  $E_A$  in de toestand  $A$ . Is dit kinetische of potentiële energie, of een combinatie van beide?
- c) Bereken de energie verandering van het gas tijdens het proces  $AB$ .
- d) Bereken de door het gas verrichte arbeid  $w_{AB}$  en de door het gas opgenomen warmte  $q_{AB}$  tijdens het proces  $AB$ .
- e) Bereken de door het gas verrichte arbeid  $w_{BC}$  en de door het gas opgenomen warmte  $q_{BC}$  tijdens het proces  $BC$ .
- f) Laat voor het proces  $DA$  m.b.v. de Eerste Hoofdwet zien dat  $(3/T)dT + (2/V)dV = 0$  gedurende elke infinitesimale temperatuur- en volumeverandering  $dT$  en  $dV$ , respectievelijk. Toon vervolgens aan dat  $V_D = V_A(T_A/T_C)^{\frac{3}{2}}$ .
- g) Indien het proces van toestand  $A$  naar toestand  $B$  irreversibel is i.p.v. reversibel geweest zou zijn, zou dan de entropie verandering groter of kleiner zijn geweest, of even groot?
- h) We nemen niet langer aan dat het gas ideaal is. Gegeven is nu dat de Gibbs vrije energie  $G = E - ST + pV$  van het gas de thermodynamische potentiaal is als functie van de temperatuur  $T$ , de druk  $p$ , en het aantal deeltjes  $N$ . Gebruik de Eerste Hoofdwet om te laten zien dat de differentiaal van  $G$  gegeven wordt door  $dG = -SdT + \mu dN + Vdp$ , met  $S$  de entropie en  $\mu$  de chemische potentiaal van het gas. Welke Legendre transformatie moet op  $G(T, N, p)$  uitgevoerd worden om de thermodynamische potentiaal als functie van  $(T, N, V)$  te verkrijgen? Geef de bijbehorende differentiaal.

### Opgave 3

(30 punten)

We beschouwen een mono-atomair klassiek ideaal gas van  $N$  identieke polariseerbare deeltjes in een 3-dimensionaal vat van volume  $V$  op temperatuur  $\tau$ . In dit vat heerst een homogeen elektrisch veld, zodanig dat elk gasdeeltje (door polarisatie) een potentiële energie  $-\epsilon$  heeft, ongeacht de positie  $r_i$

van het deeltje in het vat. Er geldt  $\epsilon > 0$ , en  $i = 1, 2, \dots, N$  is een label voor de deeltjes. De kanonieke partitiesom wordt dan ook gegeven door

$$Z(N, V, \tau) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_V d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N \exp[\epsilon N/\tau - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2/(2m\tau)]$$

met  $h$  de constante van Planck,  $m$  de massa van een deeltje, en  $\mathbf{p}_i$  de impuls van deeltje  $i$ .

- Verklaar kort de voorfactor  $1/N!$ , geef de grenzen van de impulsintegraties, en laat in een paar beargumenteerde stappen zien dat  $Z(N, V, \tau) = \exp[\epsilon N/\tau] V^N / (N! \Lambda^{3N})$ . Bereken  $\Lambda$ , en geef de dimensie van  $\Lambda$ .
- Bereken de Helmholtz vrije energie  $F(N, V, \tau)$ ; maak hierbij gebruik van de Stirling formule. Is  $F$  extensief of intensief?
- Bereken de gemiddelde energie  $U$  van het gas in het vat.
- Bereken de chemische potentiaal  $\mu(N, V, \tau)$  van het gas in het vat. Is  $\mu$  intensief of extensief?

We veronderstellen nu dat de wanden van het vat poreus zijn, zodanig dat het vat gasdeeltjes kan uitwisselen met een zeer groot reservoir van hetzelfde (ideale) gas. In het reservoir heerst géén elektrisch veld, de temperatuur is er  $\tau$ , de gasdruk in het reservoir is  $p$ ; dus de chemische potentiaal  $\mu_r$  in het reservoir is  $\mu_r = \tau \ln(p\Lambda^3/\tau)$ . Het aantal deeltjes in het vat kan nu dus fluctueren, maar heeft een gemiddelde waarde die we  $\langle N \rangle$  noemen.

- Welke conditie bepaalt het diffusief (of chemisch) evenwicht tussen het reservoir en het poreuze vat met daarin het elektrisch veld?
- Bereken de evenwichts dichtheid van gasdeeltjes  $\langle N \rangle/V$  in het vat met het elektrisch veld als functie van  $p, \tau, \epsilon$ . Is  $\langle N \rangle/V$  groter of kleiner dan de gasdichtheid in het reservoir, of even groot?
- Geef, voor het geval dat  $\langle N \rangle = 10^{24}$ , de orde van grootte van de typische fluctuaties rondom deze gemiddelde waarde. (Dit mag zonder of met berekening).