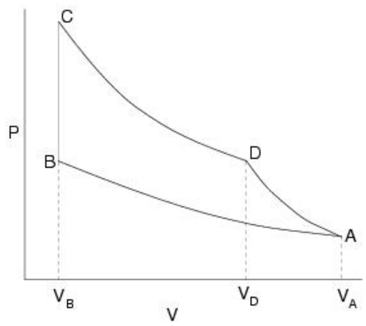
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-201b werd in 2005/2006 gegeven door E. van Roij.

# Thermische Fysica (NS-201b)
# 26 januari 2004

## Opgave 1

We beschouwen een mono-atomair klassiek ideaal gas met een vast aantal deeltjes $N$. Bij temperatuur $T$ is de energie dus gegeven door $E = 3NkT/2$, met $k$ de constante van Boltzmann. Het gas wordt op reversibele wijze aan het cyclische proces ABCDA onderworpen zoals aangegeven in het onderstaande druk-volume ($pV$) diagram. De temperatuur en het volume in de begintoestand A zijjn $T_{\rm A}$ en $V_{\rm A}$, respectievelijk. De deelprocessen zijn:

- A→B: isotherme compressie van $V_{\rm A}$ naar $V_{\rm B}$.
- B→C: temperatuurverhoging tot $T_{\rm C}$ bij constant volume.
- C→D: isotherme expansie tot $V_{\rm D}$.
- D→A: adiabatische expansie naar $V_{\rm A}$ en $T_{\rm A}$.




a) Laat zien dat de druk in B gegeven wordt door $p_B = NkT_{\rm A}/v_{\rm B}$.

b) In het deelproces A→B verricht het gas een hoeveelheid arbeid $E_{\rm AB}$, en neemt het een hoeveelheid warmte $Q_{\rm AB}$ op; de energieverandering van het gas tijdens dit deelproces noemen we $\Delta E_{\rm AB}$. Aan welke relatie voldoen deze drie grootheden volgens de Eerste Hoofdwet, en bereken ze vervolgens alledrie. (Denk aan de tekens).

c) Bereken de entropieverandering tussen de toestanden A en B van het gas. Zou deze verandering toenemen, afnemen of gelijk blijven indien het deelproces A→B irreversibel geweest zou zijn? Motiveer uw antwoord.

d) Bereken voor deelproces B→C de energieverandering $\Delta E_{\rm BC}$, de door het gas verrichte arbeid $W_{\rm BC}$, en de door het gas opgenomen warmte $Q_{\rm BC}$.

e) Wat is de entropieverandering van het gas tijdens deelproces D→A?

Laat hieruit zien dat tijdens elke kleine stap in het deelproces D→A geldt dat $\mathrm{d}E + p\,\mathrm{d}V = 0$.

f) Gebruik onderdeel e) om te laten zien dat $T_{\rm C}V_{\rm D}^{\frac{2}{3}} = T_{\rm A}V_{\rm A}^{\frac{2}{3}}$.

## Opgave 2

Stel dat de kanonieke partitiesom van een of ander (niet-ideaal) gas van $N$ deeltjes in een volume $V$ bij temperatuur $T$ gegeven wordt door

$$Z(N,V,T) = \frac{\left(\frac{V}{N}\right)^N \exp\left(\frac{N-BN^2}{VkT}\right)}{\Lambda^{3N}}, \tag{1}$$

met $B > 0$ een constante, $k$ de constante van Boltzmann, en $\Lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ de thermische golflengte. Hier is $h$ de constante van Planck, en $m$ de massa van een gasdeeltje.

a) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(N,V,T)$ van dit systeem.

b) Gebruik dat $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$ om de chemische potentiaal $\mu$ en de druk $p$ te berekenen.

c) Laat zien dat $F$ extensief is, en $p$ intensief.

d) Verwacht u voor dit systeem een kritische temperatuur $T_c$ zodanig dat er gas-vloeistof coëxistentie zal kunnen plaatsvinden indien $T < T_c$?

   Motiveer uw antwoord.

e) We wensen het systeem nu niet langer te beschrijven met $(N,V,T)$ als onafhankelijke variabelen, maar met $(N,p,T)$. Bereken de bijbehorende thermodynamische potentiaal $G(N,p,T)$ d.m.v. een Legendre transformatie van $F(N,V,T)$, en geef een uitdrukking voor $\mathrm{d}G$ analoog aan die voor $\mathrm{d}F$ zoals gegeven in onderdeel b).

## Opgave 3

We beschouwen een systeem van $N$ niet-wisselwerkende deeltjes op vaste posities in een rooster. Elk deeltje heeft twee toestanden tot zijn beschikking: het zit of in toestand 1 met energie $\varepsilon_1$, of in toestand 2 met energie $\varepsilon_2$. We gaan ervan uit dat $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

a) Geef een fysisch voorbeeld van een zgn. twee-niveau systeem.

b) Bereken de multipliciteit van de macroscopische toestand waarin $M$ deeltjes in toestand 1 en $N - M$ deeltjes in toestand 2 zitten. Wat is de energie in deze toestand?

c) Geef met behulp van de Stirling formule een uitdrukking voor de entropie $S(M)$, en geef aan voor welke waarde(n) van $M$ de entropie maximaal is, en voor welke waarde(n) minimaal.

We beschouwen het systeem nu bij temperatuur $T$. Noem de constante van Boltzmann $k$.

d) Bereken de kanonieke toestandsom van 1 deeltje $Z_1(T)$.

e) Bereken de kans $P_1$ om een gegeven deeltje in toestand 1 aan te treffen, en de kans $P_2$ om het in toestand 2 aan te treffen.

f) Bereken de gemiddelde energie $\langle\varepsilon\rangle$ van een gegeven deeltje als functie van $T$. Schets deze curve voor het geval dat $\varepsilon_1 = 0$ en $\varepsilon_2 > 0$, en geef de hoge-$T$ en lage-$T$ limietwaarden aan op de energie-as.

We kunnen de microtoestand van het systeem van $N$ deeltjes karakteriseren door $\{j_1, j_2, \cdots, j_N\}$ met $j_i = 1$ of $j_1 = 2$al naar gelang deeltje $i$ in toestand 1 of 2 zit. De totale energie in deze microtoestand is dus $\varepsilon_{j_1} + \varepsilon_{j_2} + \cdots + \varepsilon_{j_N}$, en de kanonieke toestandsom is

$$Z(N,T) = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} \cdots \sum_{j_N=1}^{2} \exp[-\beta(\varepsilon_{j_1} + \varepsilon_{j_2} + \cdots + \varepsilon_{j_N})],$$

met $\beta = \frac{1}{kT}$.

g) Laat zien dat $Z(N,T) = (Z_1(T))^N$, en bereken hieruit de Helmholtz vrije energie $F(N,T)$.

h) Wat verwacht u voor de hoge-$T$ en de lage-$T$ limiet van de entropie $S(N,T)$ van het systeem van $N$ deeltjes? [U mag hier of fysische argumenten gebruiken, of $S(N,T)$ eerst expliciet uitrekenen en dan de twee limietgevallen bekijken.]