Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}\!\mathcal{BC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-202B werd in 2007/2008 gegeven door .

Quantummechanica 1 (NS-202B)
8 november 2007

Opgave 1 - Concepten en begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Hoe ziet de (tijdsafhakelijke) Schrödingervergelijking er uit?

b) Door welke operator wordt in de quantummechanica de impuls van een deeltje gegeven?

c) Hoe bereken je de verwachtingswaarde van een observabele Q in een toestand $\psi(x)$?

d) Door welke operatie verkrijg je uit de tijsafhankelijke Schrödingervergelijking de *tijdsonafhankelijke* Schrödingervergelijking?

e) Wat is de fysische betekenis van de absolute waarde in het kwadraat $|\Psi|^2$ van een golffunctie?

f) Wat is de samenhang tussen $\Psi(x,t)$ en $\psi(x)$ voor een stationaire toestand?

g) Hoe ziet een golffunctie eruit waarvoor elke meting van x een vaste waarde x_0 oplevert?

h) Wat zijn de eigenschappen van de functies die als golffunctie een fysische toestand kunnen beschrijven? (Noem er twee)

i) Wat zij de golffuncties ψ_n van de stationaire toestanden van een oneindige put? (normalisatie is hier niet vereist)

j) Waarom is de stationaire oplossing voor een vrij deeltje fysisch niet toegestaan?

(per vraag 1 punt)

Opgave 2 - Harmonische Oscillator

a) De ladderoperatoren zijn gegeven door:

$$a_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x \mp ip).$$

Toon met behulp van de canonieke commutatierelatie tussen x en p dat

$$[a_-, a_+] = 1.$$

(1 punt)

b) Een operator is gegeven door:

$$Q \equiv \frac{1}{2m}(p + m\omega x)^2.$$

Schrijf deze met behulp van de ladderoperatoren. Toon aan dat voor de verwachtingswaarde in een stationaire toestand ψ_n van de harmonische oscillator geldt:

$$\langle Q\rangle = \langle H\rangle = E_n.$$

(*Let op: deze operator Q is niet gelijk aan de Hamiltoniaan en is niet eens een observabele, maar de verwachtingswaarde van Q in de stationaire toestanden komt toch overeen met de verwachtingswaarde van de Hamiltoniaan).* *(2 punten)*

c) Door de formule

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n \psi_0$$

op de grondtoestand

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

toe te passen, toon aan dat de eerste en tweede aangeslagen toestand gegeven zijn door:

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

en

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Toets de normalisatie van ψ_2. *(3 punten)*

d) Voor $t = 0$ is het deeltje in de toestand

$$\Psi(x, 0) = A \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Bepal A uit de normalisatie. Bereken de verwachtingswaarde van de energie. Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x, t)$ aan. Bij welke tijd $t_1 > 0$ komt de golffunctie voor het eerst weer overeen met $\Psi(x, 0)$? (*Hint: je kan $\Psi(x, 0)$ uitdrukken als superpositie van de eerste drie toestanden.*) *(3 punten)*

e) Bereken de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ in de toestand $\Psi(x, t)$. (*Hint: Gebruik de symmetrieeigenschappen*). *(1 punt)*

Opgave 3 - Dubbele Deltapotentiaal

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \alpha_1 \delta(x + a) + \alpha_2 \delta(x - a).$$

a) Geef de algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden

$$\begin{array}{rcc} I: & : & x < -a \\ II: & : & -a < x < a \\ III: & : & x > a \end{array}$$

aan voor een deeltje met energie $E > 0$. Hoe kan je de oplossingen verder beperken voor een deeltje dat van links $(-\infty)$ komt? *(2 punten)*

b) Stel de randvoorwaarden in $x = \pm a$ op. Gebruik de continuiteit en de relatie voor de afgeleide bij een deltapotentiaal met coëfficiënt α_i bij $x = \pm a$:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{2m\alpha_i}{\hbar^2}\psi(\pm a).$$

Toon aan dat de samenhang tussen de amplitude A van de van links inlopende golf en de amplitude F van de naar rechts uitlopende golf gegeven is door:

$$F = A \cdot \frac{1}{(1 - i\beta_1)(1 - i\beta_2) + \beta_1\beta_2 \exp(4ika)}$$

met

$$\beta_i \equiv \frac{m\alpha_i}{\hbar^2 k}$$

en

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

(4 punten)

c) Bereken de transmissiecoëfficiënt T voor het geval $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$ en T' voor het geval $\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha$. *(2 punten)*

d) Toon aan dat de transmissiecoëfficiënt T voor $a \to 0$ overeenkomt met:

$$T = \frac{1}{1 + 4\beta^2}.$$

Wat gebeurt met T' voor $a \to 0$? Hoe verandert de potentiaal in de twee gevallen als $a \to 0$? Kan je daarmee de limieten van de transmissiecoëfficiënten verklaren? *(2 punten)*

Ter herinnering:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{n!}{2}a^{2n+2}$$