Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-202B werd in 2008/2009 gegeven door .

Quantum mechanica 1 (NS-202B)
7 november 2008

Opgave 1. Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Wat is de fysische interpretatie van een golffunctie?

b) Door welke operator wordt in de quantummechanica de kinetische energie van een deeltje gegeven?

c) Hoe groot is de constante van Planck ongeveer? (h of $\hbar$, een decimaal is voldoende - let op de eenheid.)

d) Hoe bereken je de kans een deeltje tussen $x = a$ en $x = b$ te vinden?

e) Hoe ziet de tijdsafhankelijkheid van een stationaire golffunctie met energie E eruit?

f) Hoe ziet de Hamiltoniaan van de harmonische oscillator er uit?

g) Wat is het energiespectrum van de harmonische oscillator?

h) Geef de commutatierelatie tussen de plaats en impuls aan.

i) Hoe werken de ladderoperatoren op de stationaire toestanden van de harmonische oscillator?

j) Hoe schrijf je een fysische toestand van een vrij deeltje?

Opgave 2. Oneindige put

Beschouw het systeem van de oneindige put, d.w.z., een deeltje met massa m in een potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{anders} \end{cases}$$

a) Toon aan dat

$$\psi_n(x) = A \sin(\frac{n\pi}{a}x) \tag{1}$$

de stationaire oplossingen zijn. Bereken A door normalisatie. *(2 punt)*

b) Het deeltje is bij $t = 0$ in de toestand:

$$\Psi(x, 0) = B \sin(\frac{\pi}{a}x) \left[1 + 4\cos(\frac{\pi}{a}x)\right] \tag{2}$$

Toon aan dat deze als superpositie van stationaire toestanden ψ_n geschreven kan worden:

$$\Psi(x, 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) \tag{3}$$

Bereken c_1 en c_2. *(2 punt)*

c) Wat is de kans om voor de energie de waarde $E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ te meten? Geef de verwachtingswaarde van de energie aan. *(2 punt)*

d) Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$ aan. Toon aan dat je de verwachtingswaarde van de positie kan schrijven als:

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{128}{45\pi^2}\cos(3\omega t)\right]. \tag{4}$$

(3 punt)

e) Bereken de verwachtingswaarde $\langle p \rangle$ in de toestand $\Psi(x,t)$. *(1 punt)*

Opgave 3. Transmissie door een barriere

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -L \quad (I) \\ +V_0 & -L < x < L \quad (II) \\ 0 & x > L \quad (III) \end{cases}$$

met $V_0 > 0$.

a) Geef de algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden

$$\begin{aligned} I &: \; x < -L \\ II &: \; -L < x < L \\ III &: \; x > L \end{aligned}$$

aan. Kijk naar de gevallen voor een deeltje met energie $0 < E < V_0$, $E = V_0$ en $E > V_0$. Hoe kan je de oplossingen verder beperken voor een deeltje dat van rechts ($+\infty$) komt? *(3 punt)*

b) We kijken verder naar het geval $0 < E < V_0$. Stel de randvoorwaarden in $x = \pm L$ op. Toon aan dat je de volgende relaties tussen de amplitudes B, C, D, F, en G kan afleiden:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\kappa}\right) B e^{ikL} e^{\kappa L}, \\ C &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\kappa}\right) B e^{ikL} e^{-\kappa L} \end{aligned}$$

en

$$\Rightarrow G = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{i\kappa}{k}\right) C e^{ikL} e^{\kappa L} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\kappa}{k}\right) D e^{ikL} e^{-\kappa L} \tag{5}$$

met

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \tag{6}$$

(2 punt)

c) Gebruik de vergelijkingen om een samenhang tussen de amplitude G van een van rechts inlopende golf en de amplitude B van de naar links uitlopende golf te vinden en toon dat de transmissiecoëfficiënt gegeven is door:

$$T^{-1} = \left|\frac{G}{B}\right|^2 = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{2L}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right) \tag{7}$$

Hint: je kan de volgende relatie gebruiken:

$$1 + \left(\frac{\kappa^2 - k^2}{2k\kappa}\right)^2 = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \tag{8}$$

(2 punt)

d) Met de potentiaal $V(x)$ in de limiet $L \to 0$ kan je de deltapotentiaal $V_\delta(x) = -\alpha\delta(x)$ benaderen als je stelt dat altijd: $V_0 = a/2L$ geldt. Toon aan dat de transmissiecoëfficiënt 7 in deze limiet overeenkomt met het resultaat voor de deltapotentiaal:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}} \tag{9}$$

Is voor een kleine L(maar $L > 0$) de transmissie bij de eindige barrière groter of kleiner dan voor de deltapotentiaal? (Hint: Gebruik een Taylorontwikkeling van de sinh.) *(3 punt)*

De onderstaande relatis kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se noodzakelijk er één of meer te gebruiken!

$$\begin{aligned}
\sin a \pm b &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\
\cos a \pm b &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\
\int x \sin(ax) dx &= \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax) \\
\int x \cos(ax) dx &= \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta) \\
\cosh^2 a &= 1 + \sinh^2 a \\
\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx &= n! a^{n+1} \\
\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx &= \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \\
\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx &= \sqrt{\pi}\frac{n!}{2}a^{2n+2} \\
\int_a^b f\frac{dg}{dx}dx &= -\int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b
\end{aligned}$$