DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-202B WERD IN 2009/2010 GEGEVEN DOOR T. PEITZMAN.

Hertentamen Quantummechanica 1 (NS-202b)
18 maart

Algemeen:
-De duur van het tentamen is 3 uur.
-Er mag geen boek, geen grafische rekenmachine en geen eigen formuleblad worden gebruikt.

Niet vergeten:
- schrijf leesbaar en identificieer alles wat je ospchrijft duidelijk met (deel-)vraag nummers!
- lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!
- schrijf op ieder vel je naam!

Opgave 1 - Oneindige punt

Beschouw het systeem van de oneindige punt, d.w.z., een deeltje met massa m in de potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 < x < a \\ \infty & : \quad anders \end{cases} \tag{1}$$

a) Toon aan dat $\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ de stationaire oplossing zijn. Bereken A door normalisatie. *(2 punten)*

b) Het deeltje is bij $t = 0$ in de toestand:

$$\Psi(x,0) = B\left[\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) + b\sin\left(\frac{2l\pi}{a}x\right)\right] \tag{2}$$

met b reëel en l een heel getal. Geef met hulp van normalisatie aan hoe B van b afhangt. Geef de verwachtingswaarde van de energie aan. *(2 punten)*

c) Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$ aan. Toon aan dat de kans het deeltje bij $x < a/2$ aan te vinden gegeven is door:

$$P(x < a/2) = |B|^2 a\left[\frac{1+b^2}{4} + \left(\frac{1}{l\pi}\sin(l\pi/2) - \frac{1}{3l\pi}\sin(3l\pi/2)\right) b\cos\left(\frac{3l^2\pi^2\hbar t}{2ma^2}\right)\right] \tag{3}$$

Geef $P(x < a/2)$ aan voor $l = 1$ en $l = 2$. *(3 punten)*

d) Toon aan dat je de verwachtingswaarde van de positie kunt schrijven als:

$$\langle x\rangle = |B|^2 a^2\left[\frac{1+b^2}{4} + \frac{8b}{9l^2\pi^2}((-1)^l - 1)\cos\left(\frac{3l^2\pi^2\hbar t}{2ma^2}\right)\right] \tag{4}$$

(3 punten)

Opgave 2

We kijken naar een systeem met spin $\frac{1}{2}$

a) Schrijf de matrixrepresentatie van $\hat{S}_z, \hat{S}_+$ en $\hat{S}_-$ op in de basis eigentoestanden van $\hat{S}_z$. Bereken daaruit de matrices voor $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$. Wat zijn de eigenwaarden van $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$? Bereken ook de eigenvectoren van $\hat{S}_y$. *(3 punten)*

b) Het deeltje is in de toestand

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{5}$$

Metingen leveren de verwachtingswaarden:

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{3}\hbar \tag{6}$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{1}{3}\hbar \tag{7}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{6}\hbar \tag{8}$$

Bepaal daaruit met de normalisatie de componenten α en β. Wat is de kans van de meetuitkomst $-\hbar/2$ bij een meting van $\hat{S}_z$? *(3 punten)*

c) Bereken de onzekerheid σ_{S_z} voor de toestand χ. (Maak gebruik van de informatie uit onderdeel b.) *(1.5 punt)*

d) Geef de toestand χ' na de meting van $\hat{S}_z$ met de meetuitkomst $-\hbar/2$ aan. Bereken de kansen om voor $\hat{S}_y$ in de toestand χ' een waarde van $+\hbar/2$ of $-\hbar/2$ te meten? (Schrijf χ' in de basis van de eigentoestanden van $\hat{S}_y$.) *(2.5 punten)*

Opgave 3 - Dubbele Deltapotentiaal

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = c_+\delta\left(X + \frac{L}{2}\right) + c_-\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \tag{9}$$

a) Geef de algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden

$$\begin{array}{ccc} I & : & x < -\frac{L}{2} \\ II & : & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ III & : & x < \frac{L}{2} \end{array}$$

aan voor een deeltje met energie $E > 0$ dat van links $(-\infty)$ komt. *(2 punten)*

b) Toon aan door integratie van de Schrödingervergelijking dat voor de sprong van de afgeleide van de golffunctie bij een deltapotentiaal $c\delta(x + a)$ geldt:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) \equiv \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left[\left.\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\right|_{y=x+\epsilon} - \left.\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\right|_{y=x-\epsilon}\right] = \frac{2mc}{\hbar^2}\psi(a) \tag{10}$$

Gebruik deze relatie voor de afgeleide bij een deltapotentiaal met coëfficiënt $c_\pm$ en de continuiteit om de randvoorwaarden in $x = \pm\frac{L}{2}$ op te stellen. *(4 punten)*

De samenhang tussen de amplitude A van de van links inlopende golf en de amplitude F van de naar rechts uitlopende golf is gegeven door (Dat hoef je nu niet zelf te berekenen!):

$$F = A \cdot \frac{1}{(1 - \iota\beta_+)(1 - \iota\beta_-) + \beta_+\beta_- exp[2ikL]} \tag{11}$$

met

$$\beta_\pm \equiv \frac{mc_\pm}{\hbar^2 k} \tag{12}$$

en

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{13}$$

c) Bereken de transmissiecoëfficiënt T voor het geval $c_+ = c_- \equiv c$ en T' voor het geval $c_+ = -c_- \equiv c$. Vereenvoudig de verkregen uitdrukking tenminste zo ver, dat duidelijk is dat T en T' reëel zijn. *(2 punten)*

d) Bereken met vergelijking (11) de transmissiecoëfficiënt T en de reflectiecoëfficiënt R voor een enkele deltapotentiaal. *(2 punten)*

Formuleblad Quantummechanica

Formele relaties

$$
\begin{aligned}
\int z^n \sin z \, \mathrm{d}z &= -z^n \cos z + n \int z^{n-1} \cos z \, \mathrm{d}z, && (1)\\
\int z^n \cos z \, \mathrm{d}z &= -z^n \sin z - n \int z^{n-1} \sin z \, \mathrm{d}z, && (2)\\
\ln \cos z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \left(2^{2^n} - 1\right) B_{2n}}{n(2n)!} z^{2n}, && (3)\\
\int_0^\infty \frac{\cos mt}{1+t^2} \, \mathrm{d}t &= \tfrac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-m}, && (4)\\
\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \, \mathrm{d}x &= n! \, a^{n+1}, && (5)\\
\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x &= \sqrt{\pi} \, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}, && (6)\\
\int_0^\infty x^{2n+1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x &= \frac{n!}{2} a^{2n+2} && (7)
\end{aligned}
$$

Natuurkundige definities

$$
J(x,t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \qquad (8)
$$

$$
\text{Comptongolflengte van het elektron } \frac{h}{mc} = 0.0242 \text{ Å} \qquad (9)
$$

$$
\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (10)
$$

$$
\begin{aligned}
\hbar &= 1.05457 \times 10^{-34} \text{ Js}, && (11)\\
c &= 2.99792 \times 10^{8} \text{ m/s}, && (12)\\
m_e &= 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, && (13)\\
e &= 1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}, && (14)\\
\epsilon_0 &= 8.85419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Jm}, && (15)\\
\alpha &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 1/137.036, && (16)\\
-E_1 &= \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} = 13.6057 \text{ eV}. && (17)
\end{aligned}
$$