Tentamen QM1a (11 November 2010)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

Niet vergeten:
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*

(*Totaal: 30 punten*)

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Wat zijn de eigenschappen van de functies die als golffunctie een fysische toestand kunnen beschrijven? (Noem er twee.)

b. Door welke operator wordt in de quantummechanica de impuls van een deeltje gegeven?

c. Hoe kan je de golffunctie fysisch interpreteren?

d. Wanneer heeft de golffunctie een oscillerend en wanneer een monotoon (dus alleen stijgend of dalend) karakter?

e. Wat betekent de onzekerheidsrelatie van Heisenberg?

f. Wat zijn de eigenschappen van een stationaire toestand?

g. Hoe schrijf je een fysische toestand van een vrij deeltje?

h. Wat gebeurt er met een toestand ψ_n van de harmonische oscillator als je de ladderoperatoren a_+ of a_- daarop toepast?

i. Hoe ziet een golffunctie eruit waarvoor elke meting van x een vaste waarde x_0 oplevert?

j. Welke waarde heeft de nulpuntsenergie van de harmonische oscillator?

(*1 punt per vraag*)

9

Opgave 2 - Oneindige put

Beschouw het systeem van de oneindige put, d.w.z., een deeltje met massa m in de potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 < x < a \\ \infty & : \quad \text{anders.} \end{cases}$$

a. Toon aan dat

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$ 2

de stationaire oplossingen voor $0 < x < a$ zijn. Bereken A door normalisatie. (*2 punten*)

b. Bereken de verwachtingswaarden van de kinetische en de potentiële energie in de toestand ψ_n met willekeurige n. (*2 punten*) 2

c. Het deeltje is bij $t = 0$ in de (genormaliseerde) toestand:

$$\Psi(x, 0) = B \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2a}x\right).$$ 1

Toon aan dat deze als superpositie van stationaire toestanden ψ_n geschreven kan worden:

$$\Psi(x, 0) = c\,\psi_3(x) + d\,\psi_4(x).$$

Bereken c en d. Wat is de kans om voor de energie de waarde $E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ te meten? (*2 punten*) $|c|^2$

d. Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x, t)$ en toon aan dat de waarschijnlijkheidsdichtheid $|\Psi(x, t)|^2$ geschreven kan worden als:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{a}x\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)\cos(\Omega t)\right].$$ 1

Bereken de waarde van Ω.
(*1 punt*)

e. Toon aan dat je de kans het deeltje in het interval $0 < x < a/3$ te vinden kunt schrijven als:

$$P(t) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{32\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{7\pi}\cos(\Omega t).$$ 2

(*3 punten*)

Opgave 3

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -a \quad (I) \\ +W & : \quad -a < x < a \quad (II) \\ 0 & : \quad x > a \quad (III) \end{cases} \tag{1}$$

voor een deeltje dat van links ($-\infty$) komt en energie E met $0 < E < W$ heeft.

a. Geef de oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden aan.
(*2 punten*) 2

b. Stel de randvoorwaarden in $x = \pm a$ op. Gebruik de vergelijkingen om een samenhang tussen de amplitude A van de van links inlopende golf en de amplitude B van de naar links uitlopende golf te vinden en toon dat de reflectiecoëfficiënt gegeven is door:

$$R = \frac{\frac{W^2}{4E(W-E)} \sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}{1 + \frac{W^2}{4E(W-E)} \sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}. \tag{2}$$

(Hint: Als je in deze berekening vastloopt, ga eerst de andere onderdelen afmaken.) (*5 punten*) 3

c. Kan je alle parameters van de golffunctie uit de randvoorwaarden bepalen? Is dat een probleem? 1/2
(*1 punt*)

d. In het boek wordt de transmissiecoëfficiënt T voor de potentiaal:

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -a \quad (I) \\ -W & : \quad -a < x < a \quad (II) \\ 0 & : \quad x > a \quad (III) \end{cases}$$

met $W > 0$ en energie $E > 0$ berekend als:

$$T^{-1} = 1 + \frac{W^2}{4E(E+W)} \sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+W)}\right).$$

Leid nu vergelijking (2) voor de potentiaal $V(x)$ nogmaals af, nu uitgaande van dit resultaat voor $\tilde{V}(x)$.
(*2 punten*)

Formuleblad:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a$$

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = n! a^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi} \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = -\int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$