Tentamen QM1a (xx November 2010)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

Niet vergeten:
• *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
• *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
• *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
• *Schrijf op ieder vel je naam!* (*Totaal: 30 punten*)

— De vragen zijn conform het tentamen, hier zijn de oplossingen achter de deelvragen ingevoegd.

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Wat zijn de eigenschappen van de functies die als golffunctie een fysische toestand kunnen beschrijven? (Noem er twee.)

   Oplossing: De belangrijkste zijn: De golffunctie moet aan de Schrödingervergelijking voldoen en de functie moet kwadraatintegrabel zijn. Je zal ook de continuiteit van de golffunctie kunnen noemen.

b. Door welke operator wordt in de quantummechanica de impuls van een deeltje gegeven?

   Oplossing: De operator voor de impuls is:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

c. Hoe kan je de golffunctie fysisch interpreteren?

   Oplossing: Volgens de Born interpretatie is de fysische betekenis van de golffunctie ψ dat $\psi^*\psi$ een waarschijnlijkheidsdichtheid voorstelt.

d. Wanneer heeft de golffunctie een oscillerend en wanneer een monotoon (dus alleen stijgend of dalend) karakter?

   Oplossing: Als de totale energie groter is dan de potentiële energie heeft de golffunctie een oscillerend, anders een monotoon karakter.

e. Wat betekent de onzekerheidsrelatie van Heisenberg?

   Oplossing: De spreiding van de plaats en van de impuls kan je niet tegelijkertijd willekeurig verkleinen. Kleine spreiding in de plaats houdt een grote spreiding in de impuls in en andersom. Opmerking: Als iemand alleen de onzekerheidsrelatie als formule opschrijft zal dat een halve punt kunnen opleveren.

f. Wat zijn de eigenschappen van een stationaire toestand?

   Oplossing: Voor stationaire toestanden veranderen verwachtingswaarden van observabelen niet. Ze hebben scherp bepaalde energieën.

g. Hoe schrijf je een fysische toestand van een vrij deeltje?

Oplossing: Als een golfpakket.

h. Wat gebeurt er met een toestand ψ_n van de harmonische oscillator als je de ladderoperatoren a_+ of a_- daarop toepast?

Oplossing: $a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ en $a_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$.
Opmerking: Het kan ook alleen in woorden gezegd worden. Dus de factoren $\sqrt{n+1}$ en $\sqrt{n}$ zijn niet geeist voor een punt.

i. Hoe ziet een golffunctie eruit waarvoor elke meting van x een vaste waarde x_0 oplevert?

Oplossing: De golffunctie is:

$$\psi(x) = \delta(x - x_0).$$

j. Welke waarde heeft de nulpuntsenergie van de harmonische oscillator?

Oplossing: $E_0 = \hbar\omega/2$.

(*1 punt per vraag*)

Opgave 2 - Oneindige put

Beschouw het systeem van de oneindige put, d.w.z., een deeltje met massa m in de potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 < x < a \\ \infty & : \quad \text{anders.} \end{cases}$$

a. Toon aan dat

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

de stationaire oplossingen voor $0 < x < a$ zijn. Bereken A door normalisatie. (*2 punten*)

Oplossing: De golffunctie moet aan de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

voldoen. Door invullen van de functies kan dat aangetoond worden als

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(-\frac{n\pi}{a}\right) = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

geldt. Verder moeten de functies aan de randvoorwaarden $\psi_n(0) = 0$ en $\psi_n(a) = 0$ voldoen, wat ook makkelijk aan te tonen is. Normalisatie geeft:

$$1 = \int_0^a |\psi_n(x)|^2\, dx = |A|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

Verder geldt:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \left[1 - \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] dx$$

en voor de periodieke functies is

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a dx = a.$$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^a |\psi_n(x)|^2\, dx = |A|^2\,\frac{a}{2}.$$

We kunnen $A = \sqrt{2/a}$ kiezen.

b. Bereken de verwachtingswaarden van de kinetische en de potentiële energie in de toestand ψ_n met willekeurige n. (*2 punten*)

Oplossing: Je kan de verwachtingswaarden door expliciete integratie uitrekenen:

$$\langle V\rangle = \int_0^a \psi_n^*\, 0\, \psi_n dx = 0.$$

$$\langle T\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^a \psi_n^* \frac{d^2}{dx^2}\psi_n dx.$$

In de tweede formule kan je of expliciet de afgeleide van de golffunctie berekenen of de Schrödingervergelijking toepassen om het resultaat te verkrijgen:

$$\langle T\rangle = E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

c. Het deeltje is bij $t = 0$ in de (genormaliseerde) toestand:

$$\Psi(x,0) = B\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2a}x\right).$$

Toon aan dat deze als superpositie van stationaire toestanden ψ_n geschreven kan worden:

$$\Psi(x,0) = c\,\psi_3(x) + d\,\psi_4(x).$$

Bereken c en d. Wat is de kans om voor de energie de waarde $E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ te meten?
(2 punten)

Oplossing: De golffunctie kan je met de formules voor de trigonometrische functies schrijven als:

$$\Psi(x,0) = \frac{B}{2}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right].$$

We vinden dus $c = -d$. Met de normalisatie is een mogelijke keuze $c = -d = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
De kans om de energie E_3 van de tweede aangeslagen toestand te meten komt overeen met het kwadraat van de amplitude van de toestand ψ_3:

$$P(E_3) = |c|^2 = \frac{1}{2}.$$

d. Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$ en toon aan dat de waarschijnlijkheidsdichtheid $|\Psi(x,t)|^2$ geschreven kan worden als:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{a}x\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)\cos(\Omega t)\right].$$

Bereken de waarde van Ω.
(1 punt)

Oplossing: De tijdsafhankelijke golffunctie is:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\psi_3(x)\,e^{-i\frac{9\pi^2\hbar}{2ma^2}t} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,\psi_4(x)\,e^{-i\frac{16\pi^2\hbar}{2ma^2}t} = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\,e^{-i9\omega t} - \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)\,e^{-i16\omega t}.$$

met $\omega = \pi^2\hbar/(2ma^2)$. Daaruit volgt direkt de gevraagde formule met $\Omega = 7\omega$.

e. Toon aan dat je de kans het deeltje in het interval $0 < x < a/3$ te vinden kunt schrijven als:

$$P(t) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{32\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{7\pi}\cos(\Omega t).$$

(3 punten)

Oplossing: De kans is te berekenen als:

$$P(t) = \int_0^{a/3}|\Psi(x,t)|^2\,dx = \frac{1}{a}\left[\int_0^{a/3}\sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right)dx + \int_0^{a/3}\sin^2\left(\frac{4\pi}{a}x\right)dx - 2\cos(\Omega t)\int_0^{a/3}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)dx\right].$$

Dit levert:

$$P(t) = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{2}x - \frac{a}{12\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{a}x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{a}{16\pi}\sin\left(\frac{8\pi}{a}x\right) - 2\cos(\Omega t)\frac{1}{2}\left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \frac{a}{7\pi}\sin\left(\frac{7\pi}{a}x\right)\right]\right\}\Bigg|_0^{a/3}.$$

en daaruit:

$$P(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12\pi}\sin(2\pi) + \frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi}\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{7\pi}\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right].$$

Opgave 3

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -a \quad (I) \\ +W & : \quad -a < x < a \quad (II) \\ 0 & : \quad x > a \quad (III) \end{cases} \tag{1}$$

voor een deeltje dat van links ($-\infty$) komt en energie E met $0 < E < W$ heeft.

a. Geef de oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden aan.
(2 punten)

Oplossing: Met de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = [E - V(r)]\,\psi,$$

vind je als oplossingen in (I):

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \text{ met } k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE},$$

in (II):

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}, \text{ met } \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)},$$

en in (III):

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx}, \text{ met } k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE},$$

waarbij gebruik gemaakt is van het gegeven dat het deeltje van links komt.

b. Stel de randvoorwaarden in $x = \pm a$ op. Gebruik de vergelijkingen om een samenhang tussen de amplitude A van de van links inlopende golf en de amplitude B van de naar links uitlopende golf te vinden en toon dat de reflectiecoëfficiënt gegeven is door:

$$R = \frac{\frac{W^2}{4E(W-E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}{1 + \frac{W^2}{4E(W-E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}. \tag{2}$$

(Hint: Als je in deze berekening vastloopt, ga eerst de andere onderdelen afmaken.) *(5 punten)*

Oplossing: Continuïteit van de golffunctie in $x = -a$:

$$Ae^{-ika} + Be^{+ika} = Ce^{-\kappa a} + De^{+\kappa a} \tag{3}$$

en in $x = +a$:

$$Ce^{+\kappa a} + De^{-\kappa a} = Fe^{+ika}. \tag{4}$$

Continuiteit van de eerste afgeleide in $x = -a$:

$$ik\left(Ae^{-ika} - Be^{+ika}\right) = \kappa\left(Ce^{-\kappa a} - De^{+\kappa a}\right) \tag{5}$$

en in $x = +a$:

$$\kappa\left(Ce^{+\kappa a} - De^{-\kappa a}\right) = ikFe^{+ika}. \tag{6}$$

Uit (3) en (5) volgen:

$$Ae^{-ika}\left(1 + i\frac{k}{\kappa}\right) + Be^{+ika}\left(1 - i\frac{k}{\kappa}\right) = 2Ce^{-\kappa a} \tag{7}$$

en:

$$Ae^{-ika}\left(1 - i\frac{k}{\kappa}\right) + Be^{+ika}\left(1 + i\frac{k}{\kappa}\right) = 2De^{+\kappa a}. \tag{8}$$

Met (4) en (6) vindt je:

$$Ce^{+\kappa a}\left(1 + i\frac{\kappa}{k}\right) + De^{-\kappa a}\left(1 - i\frac{\kappa}{k}\right) = 0. \tag{9}$$

C en D uit (7) en (8) kan je invullen in (9):

$$2Ae^{-ika} i\frac{\kappa^2 + k^2}{\kappa k}\sinh(2\kappa a) + 2Be^{+ika}\left[2\cosh(2\kappa a) + i\frac{\kappa^2 - k^2}{\kappa k}\sinh(2\kappa a)\right] = 0 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow B = -Ae^{-2ika}\frac{i\frac{\kappa^2+k^2}{2\kappa k}\sinh(2\kappa a)}{\cosh(2\kappa a) + i\frac{\kappa^2-k^2}{2\kappa k}\sinh(2\kappa a)} \tag{11}$$

De reflectiecoëfficiënt is dan:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\frac{(\kappa^2+k^2)^2}{(2\kappa k)^2}\sinh^2(2\kappa a)}{1 + \frac{(\kappa^2+k^2)^2}{(2\kappa k)^2}\sinh^2(2\kappa a)} \tag{12}$$

$$= \frac{\frac{W^2}{4E(W-E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}{1 + \frac{W^2}{4E(W-E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(W-E)}\right)}. \tag{13}$$

c. Kan je alle parameters van de golffunctie uit de randvoorwaarden bepalen? Is dat een probleem?
(*1 punt*)

Oplossing: Er is een onbepaaldheid vanwege een willekeurige factor (bijv. A), maar die heeft geen invloed op de fysisch meetbare transmissie en reflectie coëfficiënten omdat die alleen van amplitude *verhoudingen* afhangen.

d. In het boek wordt de transmissiecoëfficiënt T voor de potentiaal:

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -a \quad (I) \\ -W & : \quad -a < x < a \quad (II) \\ 0 & : \quad x > a \quad (III) \end{cases}$$

met $W > 0$ en energie $E > 0$ berekend als:

$$T^{-1} = 1 + \frac{W^2}{4E(E+W)}\sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+W)}\right).$$

Leid nu vergelijking (2) voor de potentiaal $V(x)$ nogmaals af, nu uitgaande van dit resultaat voor $\tilde{V}(x)$.
(*2 punten*)

Oplossing: Je kan in deze vergelijking het teken van W veranderen en $\sin(ix) = i\sinh(x)$ gebruiken om de transmissie voor ons geval te berekenen. Dan kom je met $T + R = 1$ op de reflectiecoëfficiënt.

Formuleblad:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a$$

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = n! a^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = -\int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$