NS-202 B
5-11-2009

Tentamen QM1a (05 November 2009)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste ogavenbladje.

Niet vergeten:
- *schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Waardoor wordt in de quantummechanica een toestand van een systeem beschreven?

b. Schrijf de operator voor de impuls van een deeltje op.

c. Hoe groot is de constante van Planck ongeveer? (h of $\hbar$, een decimaal is voldoende - let op de eenheid.)

d. Door welke operatie verkrijg je uit de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking de *tijdsonafhankelijke* Schrödingervergelijking?

e. Hoe schrijf je de Hamiltoniaan in de quantummechanica?

f. Wat is de samenhang tussen $\Psi(x,t)$ en $\psi(x)$ voor een stationaire toestand?

g. Wat betekent de onzekerheidsrelatie van Heisenberg?

h. Wat wordt bedoeld met "tunneling"? Is er een klassiek analogon?

i. Geef de commutatierelatie tussen plaats en impuls aan.

j. Waarom is de stationaire oplossing voor een vrij deeltje fysisch niet toegestaan?

(1 punt per vraag)

Opgave 2 - Harmonische Oscillator

a. De ladderoperatoren zijn gegeven door:

$$a_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega x \mp ip\right).$$

Toon met hulp van de canonieke commutatierelatie tussen x en p aan dat

$$[a_-, a_+] = 1.$$

(1 punt)

b. Toon met hulp van de commutatierelatie tussen de ladderoperatoren aan dat:

$$\left[(a_+)^2, a_-\right] \equiv a_+a_+a_- - a_-a_+a_+ = -2a_+$$

Bereken met hulp van deze relatie de operator:

$$\hat{Q} \equiv \left[(a_+)^2, (a_-)^2\right] \equiv a_+a_+a_-a_- - a_-a_-a_+a_+.$$

Toon aan dat:

$$\hat{Q} = -\frac{4}{\hbar\omega}\hat{H}$$

geldt.
(2 punten)

c. Toon door herhaaldelijk toepassen van a_+ op de grondtoestand

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

aan dat de tweede aangeslagen toestand gegeven is door:

$$\psi_2 = A\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Toon door normalisatie dat

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

(3 punten)

d. Toon met hulp van de ladderoperatoren aan dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_{n+2} dx = \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{(n+2)(n+1)}.$$

(1.5 punten)

e. Voor $t = 0$ is het deeltje in de toestand:

$$\Psi(x,0) = B\left(b_0\psi_0(x) + b_2\psi_2(x)\right)$$

met b_0 en b_2 reëel. Bepaal B uit de normalisatie. Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$ aan en toon aan dat de verwachtingswaarde van de plaats in de toestand $\Psi(x,t)$ $\langle x\rangle = 0$ is. Toon met hulp van de relaties uit (d) aan dat de spreiding kan geschreven worden als:

$$\sigma_x^2 = |B|^2\frac{\hbar}{m\omega}\left(\frac{b_0^2}{2} + \frac{5b_2^2}{2} + \sqrt{2}b_0b_2\cos 2\omega t\right).$$

(2.5 punten)

Opgave 3 - Transmissie door een barriere

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \; x < -a & (I) \\ V_1 & : \; -a < x < 0 & (II) \\ V_2 & : \; 0 < x < b & (III) \\ 0 & : \; b < x & (IV) \end{cases} \tag{1}$$

met $E = V_2 > V_1 > 0$.

a. Geef de algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de vier gebieden

$$\begin{array}{lcl} I: & : & x < -a \\ II: & : & -a < x < 0 \\ III: & : & 0 < x < b \\ IV: & : & b < x \end{array}$$

aan. (Let op in gebied III: kijk hier expliciet naar de Schrödingervergelijking!) Beperk de oplossingen tot een deeltje dat van links ($-\infty$) komt. Maak een tekening van een mogelijke oplossing.
(3 punten)

b. Stel de randvoorwaarden in $x = -a$, $x = 0$ en $x = b$ op. Toon aan dat de transmissiecoëfficiënt gegeven is door

$$T^{-1} = \left[1 + \frac{k^2b^2}{4}\right]\cos^2(la) + \left[\left(\frac{k^2+l^2}{2kl}\right)^2 + \frac{l^2b^2}{4}\right]\sin^2(la) + \left[kb\frac{k^2+l^2}{2kl} + lb\right]\sin(la)\cos(la).$$

met: (2)

$$k \equiv \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar}; \qquad l \equiv \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{\hbar} \tag{3}$$

(5 punten)

c. Toon aan dat je bij benadering in het geval $b \ll 1/k$ en $b \ll 1/l$ kan schrijven:

$$T^{-1} = 1 + \left[\left(\frac{k^2+l^2}{2kl}\right)^2 - 1\right]\sin^2(la) \tag{4}$$

Geef verder een benadering aan voor de transmissiecoëfficiënt (2) voor het geval $a \ll 1/l$.
(2 punten)

Formuleblad:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\int x \sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a$$

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = n!a^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\,\frac{n!}{2}a^{2n+2}$$

$$\int_a^b f\frac{dg}{dx}dx = -\int_a^b \frac{df}{dx}g dx + fg|_a^b$$

$2ab^{\cos} = a^2 + b^2 - c^2$