Tentamen QM1a (10 November 2011)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgaven blad.

Niet vergeten:
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!* (*Totaal: 30 punten*)

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Wat zijn de eigenschappen van de functies die als golffunctie een fysische toestand van een kwantummechanisch systeem kunnen beschrijven? (Noem er twee.)

b. Door welke operator wordt in de quantum-mechanica de totale energie van een deeltje gegeven? Geef een uitdrukking voor deze operator aan.

c. Hoe ziet de tijds-onafhankelijke Schrödingervergelijking er uit?

d. Wanneer heeft de golffunctie een oscillerend en wanneer een monotoon (dus alleen stijgend of dalend) karakter?

e. Wat is de fysische betekenis van de absolute waarde in het kwadraat $|\Psi|^2$ van een golffunctie?

f. Geef de commutatie-relatie tussen $\hat{x}$ en $\hat{p}$ aan.

g. Hoe groot is het verschil tussen de energieën van twee opeenvolgende stationaire toestanden van de harmonische oscillator?

h. Hoe ziet een golffunctie eruit waarvoor elke meting van p een vaste waarde p_0 oplevert?

i. Waarom is de stationaire oplossing voor een vrij deeltje fysisch niet toegestaan?

j. Wat wordt bedoeld met "tunneling"? Is er een klassieke analogie?

(*1 punt per vraag*)

Opgave 2 - Harmonische Oscillator

a. De ladder-operatoren zijn gegeven door:

$$a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(m\omega x \mp ip\right).$$

Toon met hulp van de canonieke commutatie-relatie tussen x en p aan dat

$$[a_-, a_+] = 1.$$

(1 punt)

b. Schrijf de Hamiltoniaan $\hat{H}$ van de harmonische oscillator met hulp van de ladder-operatoren. Geef de verwachtingswaarde $\left\langle \hat{H} \right\rangle$ in de stationaire toestand ψ_n. Bekijk dan de operator:

$$\hat{Q} \equiv \frac{1}{2m} \left(p + m\omega x\right)^2.$$

Schrijf ook deze op met hulp van de ladder-operatoren. Toon aan dat voor de verwachtingswaarde in een stationaire toestand ψ_n van de harmonische oscillator geldt:

$$\left\langle \hat{Q} \right\rangle = \left\langle \hat{H} \right\rangle.$$

(3 punten)

c. Door de formule

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a_+\right)^n \psi_0$$

op de grondtoestand

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

toe te passen, toon aan dat de eerste en tweede aangeslagen toestand gegeven zijn door:

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

en

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right).$$

Toets de normalisatie van ψ_2.
(3 punten)

d. Voor $t = 0$ is het deeltje in de toestand:

$$\Psi(x, 0) = A \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - 1\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right).$$

Bepaal A uit de normalisatie. Bereken de verwachtingswaarde van de energie. Geef de tijds-afhankelijke golffunctie $\Psi(x, t)$ aan. Bij welke tijd $t_1 > 0$ komt de golffunctie voor het eerst weer overeen met $\Psi(x, 0)$? *(Hint: Je kan $\Psi(x, 0)$ uitdrukken als superpositie van de eerste drie toestanden.)*
(3 punten)

Opgave 3 - Dubbele Deltapotentiaal

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \alpha_1 \delta(x + L) + \alpha_2 \delta(x - L). \tag{1}$$

a. Geef de algemene oplossingen van de tijds-onafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden

$$\begin{array}{lcl} I: & : & x < -L \\ II: & : & -L < x < L \\ III: & : & x < L \end{array} \tag{2}$$

aan voor een deeltje met energie $E > 0$. Hoe kan je de oplossingen verder beperken voor een deeltje dat van links ($-\infty$) komt?
(2 punten)

b. Stel de randvoorwaarden in $x = \pm L$ op. Gebruik de continuïteit en de relatie voor de afgeleide bij een deltapotentiaal met coëfficiënt α_i bij $x = \pm L$:

$$\Delta \left(\frac{d\psi}{dx} \right) = -\frac{2m\alpha_i}{\hbar^2} \psi(\pm L). \tag{3}$$

Toon aan dat de samenhang tussen de amplitude A van de van links inkomende golf en de amplitude F van de naar rechts uitgaande golf gegeven is door:

$$F = A \cdot \frac{1}{(1 - i\beta_1)(1 - i\beta_2) + \beta_1 \beta_2 \exp(4ikL)} \tag{4}$$

met

$$\beta_i \equiv \frac{m\alpha_i}{\hbar^2 k} \tag{5}$$

en

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{6}$$

(4 punten)

c. Bereken de transmissie-coëfficiënt T voor het geval $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$ en T' voor het geval $\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha$.
(2 punten)

d. Toon aan dat de transmissie-coëfficiënt T voor $L \to 0$ overeenkomt met:

$$T = \frac{1}{1 + 4\beta^2}. \tag{7}$$

met

$$\beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}. \tag{8}$$

Wat gebeurt met T' voor $L \to 0$? Hoe verandert de potentiaal in beide gevallen als $L \to 0$? Kan je daarmee de limieten van de transmissie-coëfficiënten verklaren?
(2 punten)

Formuleblad:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a$$

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = n! a^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = -\int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$