Tentamen QM1b (4 Februari 2010)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek, geen grafische rekenmachine en en geen eigen formuleblad worden gebruikt.

Niet vergeten:

- *schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Als kets $|f\rangle$, $|g\rangle$ gegeven zijn door complexe functies $f(x)$, $g(x)$, wat is dan het scalaire product $\langle f|g\rangle$?

b. Waarom moet de operator voor een observabele hermitisch zijn?

c. Hoe luidt het algemene onzekerheidsprincipe voor een paar observabelen $\hat{X}$, $\hat{Y}$?

d. Wanneer zijn observabelen incompatibel?

e. Geef de operator voor baanimpulsmoment aan als we in de plaatsrepresentatie werken.

f. Hoe wordt de $s = 0$, $m = 0$ (singlet) toestand samengesteld uit de toestanden van de twee spin–$\frac{1}{2}$ deeltjes?

g. Kan je toestanden van spin beschrijven met hulp van de bolfuncties $Y_l^m(\theta, \phi)$ en waarom wel/niet ?

h. Hoe groot is de Bohr-straal ongeveer?

i. Hoe schrijf je de relatie voor Dirac-orthonormaliteit van twee golffuncties? Geef een voorbeeld.

j. Wat zijn de symmetrieeisen bij verwisseling van deeltjes voor een golffunctie van twee identieke fermionen?

(1 punt per vraag)

Opgave 2

a. We kijken naar een systeem met spin $\frac{1}{2}$ en werken in de basis van eigentoestanden van $\hat{S}_z$. De matrixrepresentatie van de operatoren $\hat{S}_z$ en $\hat{S}_x$ is:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gebruik de commutatierelatie tussen $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$ om een uitdrukking voor $\hat{S}_y$ te vinden. Toon met hulp daarvan aan dat:

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

is.

(1 punt)

b. Toon aan dat de eigenspinoren van $\hat{S}_y$ gegeven zijn als:

$$\chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

en

$$\chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

en dat deze vectoren orthonormaal zijn.

(2.5 punten)

c. Een deeltje bevindt zich in de toestand:

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

We meten $\hat{S}_z$. Geef de mogelijke meetuitkomsten en de kansen daarvan. Wat is de toestand van het deeltje naar een meting van $\hat{S}_z$ met de uitkomst $+\hbar/2$?

(1.5 punten)

d. We beginnen weer in de toestand χ maar meten nu $\hat{S}_y$. Toon aan dat de kansen voor de uitkomsten gegeven zijn door:

$$W^{(y)}(\hbar/2) = \frac{1}{2}\,|\alpha - i\beta|^2$$

en

$$W^{(y)}(-\hbar/2) = \frac{1}{2}\,|\alpha + i\beta|^2\,.$$

Toon aan dat de kansen voldoen aan de relatie:

$$W^{(y)}(\hbar/2) + W^{(y)}(-\hbar/2) = 1.$$

als de toestand χ genormeerd is. Toon verder aan dat de verwachtingswaarde gegeven is als:

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle = \hbar \cdot \mathrm{Im}(\alpha^* \beta).$$

(3 punten)

e. In welke toestand is het deeltje na een meting van $\hat{S}_y$ met uitkomst $\hbar/2$? Als we nu $\hat{S}_z$ meten wat zijn dan de kansen van de meetuitkomsten?

(1 punt)

f. Geef de matrixrepresentatie van de projectieoperatoren op de eigentoestanden $\left|\chi_\pm^{(y)}\right\rangle$ van $\hat{S}_y$. Deze zijn gedefinieerd als:

$$\hat{P}_\pm^{(y)} \equiv \left|\chi_\pm^{(y)}\right\rangle \left\langle\chi_\pm^{(y)}\right| .$$

Toon aan dat de volledigheidsrelatie:

$$\hat{P}_+^{(y)} + \hat{P}_-^{(y)} = \mathbb{1}$$

geldt.

(1 punt)

Opgave 3

We kijken naar een systeem met een deeltje met massa m dat vast zit aan één eind van een staaf zonder massa van lengte R. Het andere eind zit vast in de oorsprong bij $\vec{r} = 0$. Het deeltje kan aan de staaf vrij om de oorsprong roteren.

a. Toon aan dat de Hamiltoniaan van dit systeem gegeven is door:

$$\hat{H}_0 = \frac{L^2}{2mR^2}$$

Stel dat het systeem in een toestand met baanimpulsmoment $l = 1$ zit. De tijdsonafhankelijke golffuncties zijn dus de bolfuncties:

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{i\phi}\sin\theta$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta$$

Geef de energieeigenwaarden van deze toestanden aan. Voor $t = 0$ is het systeem in de toestand

$$\Psi(x,0) = aY_1^0 + b\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right)$$

Geef de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$ aan.

(1.5 punten)

b. Het deeltje is geladen en door de rotatie heeft het systeem een magnetisch moment $\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$. De wisselwerking van het magnetisch moment met een magneetveld levert een aanvullende bijdrage in de Hamiltoniaan. Geef de totale Hamiltoniaan bij aanwezigheid van een homogeen magneetveld in z-richting $\vec{B} = B \cdot \hat{z}$ aan. Geef ook de nieuwe energieeigenwaarden van de stationaire toestanden aan.

(2 punten)

c. Ook met een magneetveld is het systeem voor $t = 0$ in de toestand

$$\Psi(x,0) = aY_1^0 + b\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right)$$

Toon aan dat de tijdsafhankelijke golffunctie nu gegeven is door:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\exp\left(-i\frac{\hbar}{mR^2}t\right)\left[\sqrt{2}\,a\cos\theta - 2ib\sin\theta\sin(\phi + \gamma\hbar Bt)\right].$$

Toon ook aan dat de kansdichtheid gegeven is door:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{3}{8\pi}\left[2\,a^2\cos^2\theta + 4b^2\sin^2\theta\sin^2(\phi + \gamma\hbar Bt)\right].$$

(2.5 punten)

d. Toon aan dat de verwachtingswaarde van de azimuthale hoek ϕ gegeven is door:

$$\langle \phi \rangle = (a^2 + 2b^2)\pi - b^2 \sin(2\gamma\hbar Bt).$$

Je kunt daarbij van de volgende relaties gebruik maken:

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{x}{4}\sin(2x)$$

en

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

(4 punten)

))