Tentamen QM1b (2 Februari 2012)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt.

Niet vergeten:
- *schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Als de kets $|\alpha\rangle$ en $|\beta\rangle$ gegeven zijn door complexe kolomvectoren, wat is dan het scalaire product $\langle\alpha|\beta\rangle$?

b. Wat zijn de mogelijke meetwaarden van een observabele?

c. Hoe ziet de matrixrepresentatie van een waarneembare grootheid (observabele) met discrete eigenwaarden eruit als je in een basis van zijn eigentoestanden werkt?

d. Hoe luidt het algemene onzekerheidsprincipe voor een paar observabelen $\hat{P}$, $\hat{Q}$?

e. Hoe schrijf je de impulsoperator in drie dimensies in de plaatsrepresentatie?

f. Kunnen twee componenten van het impulsmoment in een kwantummechanisch systeem tegelijkertijd precies bepaald zijn en waarom wel/niet?

g. Hoe is de $s = 1$, $m = 0$ (triplet) toestand samengesteld uit de toestanden van twee spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes?

h. Kan je toestanden van de spin van een electron in het atoom beschrijven met behulp van de bolfuncties $Y_l^m(\theta, \phi)$ en waarom wel/niet ?

i. Hoe groot is de Bohr-straal ongeveer?

j. Wat is de vorm van de golffunctie die een golfpakket met minimale onzekerheid ("minimum uncertainty wavepacket") in de ruimte beschrijft?

(1 punt per vraag)

Opgave 2

We beschouwen een deeltje met spin $\frac{1}{2}$ en werken in de basis van eigentoestanden van $\hat{S}_z$. De matrixrepresentatie van de operatoren $\hat{S}_z$ en $\hat{S}_y$ is:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Gebruik de commutatierelatie tussen $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$ om een uitdrukking voor $\hat{S}_x$ te vinden en toon hiermee aan dat $\hat{S}_x$ gegeven wordt door:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 punt)

(b) Toon aan m.b.v. $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$ dat de ladderoperatoren geschreven kunnen worden als

$$\hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$\hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 punt)

2. Toon aan dat de eigenspinoren van $\hat{S}_x$ gegeven worden door:

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en dat deze eigenspinoren orthonormaal zijn.

(2.5 punten)

3. Een deeltje met spin $\frac{1}{2}$ bevindt zich in de toestand:

$$\chi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

De waarde van de spin $\hat{S}_z$ in de z-richting wordt gemeten. Geef de mogelijke meetuitkomsten en de kansen daarop. Wat is de toestand van het deeltje na een meting van $\hat{S}_z$ met de uitkomst $-\hbar/2$?

(1.5 punten)

4. Het deeltje is wederom in de toestand χ, maar de component $\hat{S}_x$ van de spin in x-richting wordt nu gemeten.

   (a) Toon aan dat de kansen voor de uitkomsten $\pm\hbar/2$ gegeven worden door:

   $$W^{(x)}(\hbar/2) = \frac{1}{2}\left|u + d\right|^2$$

   en

   $$W^{(x)}(-\hbar/2) = \frac{1}{2}\left|u - d\right|^2 .$$

   (1 punt)

   (b) Toon aan dat als de toestand χ genormeerd is de totale kan 1 is zoals verwacht, oftewel:

   $$W^{(x)}(\hbar/2) + W^{(x)}(-\hbar/2) = 1.$$

   (0.5 punten)

   (c) In welke toestand is het deeltje na een meting van $\hat{S}_x$ met de uitkomst $\hbar/2$? Als we hierna $\hat{S}_z$ meten wat zijn dan de kansen van de meetuitkomsten $\pm\hbar/2$?
   (1 punt)

5. (a) Toon algemeen (dwz zonder gebruik van de expliciete matrices) aan, dat de operator

   $$\hat{Q} \equiv \hat{S}_+\hat{S}_-$$

   hermitisch is.
   (0.5 punten)

   (b) Bereken de verwachtingswaarde van $\hat{Q}$ in de toestand χ.
   (1 punt)

Opgave 3

We kijken naar een systeem met een deeltje met massa M dat vast zit aan één eind van een staaf zonder massa van lengte a. Het andere eind van de staf zit vast in de oorsprong bij $\vec{r} = 0$. Het deeltje kan aan de staaf vrij om de oorsprong roteren.

1. (a) Toon aan dat de Hamiltoniaan van dit systeem gegeven is door:

$$\hat{H}_0 = \frac{L^2}{2Ma^2}$$

   De stationaire toestanden zijn daarmee de eigentoestanden van baanimpulsmoment.
   (1 punt)

   (b) Geef de energieeigenwaarden van de drie laagste toestanden aan een hun ontaardingsgraad.
   (1 punt)

2. Op $t = 0$ is het systeem in de toestand gegeven door de golffunctie:

$$\Psi_L(\theta, \phi, t = 0) = c_1 Y_1^0(\theta, \phi) + c_2 Y_2^0(\theta, \phi)$$

   met c_1, c_2 reëel.

   (a) Schrijf de tijdsafhankelijke golffunctie op.
   (1 punt)

   (b) Bereken $|\Psi_L(\theta, \phi, t)|^2$ en toon aan dat deze gegeven wordt door:

$$|\Psi_L(\theta, \phi, t)|^2 = c_1^2 A(\theta) + c_2^2 B(\theta) + c_1 c_2 C(\theta) \cos\left(2\frac{\hbar}{Ma^2}t\right)$$

   waarbij A, B and C alleen functies van θ zijn.
   (1 punt)

   (c) Voor welke beginvoorwaarden is $|\Psi_L(\theta, \phi, t)|^2$ niet afhankelijk van de tijd?
   (0.5 punten)

   (d) Bereken de verwachtingswaarde van L^2 als functie van de tijd.
   (1.5 punten)

3. Stel nu dat het deeltje spin 1/2 heeft en in de spin-up toestand zit. De volledige golffunctie is dan gegeven door:

$$\Psi(t = 0) = \left(c_1 Y_1^0 + c_2 Y_2^0\right) \chi_+.$$

   (a) Het systeem wordt dan beschreven door het totaalimpulsmoment $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Wat is de waarde van de z-component J_z? Wat zijn de mogelijke waarden voor J^2?
   (1 punt)

   (b) Schrijf $Y_1^0 \chi_+$ en $Y_2^0 \chi_+$ in termen van de eigenfuncties van totaal impulsmoment $|j\ m_j\rangle$ op. Gebruik daarbij de Clebsch-Gordan coëfficiënten.
   (1 punt)

   (c) Schrijf de golffunctie $\Psi(t)$ als superpositie van eigenfuncties van het totale impulsmoment $\vec{J}$.
   (1 punt)

(d) Bereken de kans als functie van de tijd t om in deze toestand bij een meting van J^2 de waarde $15\hbar^2/4$ te vinden. Toon aan dat deze gegeven is door:

$$P_{15\hbar^2/4}(t) = \left[\frac{c_1^2}{3} + \frac{c_2^2}{5} - \frac{2c_1c_2}{\sqrt{15}} \cos\left(\frac{2\hbar t}{Ma^2}\right)\right].$$

(1 punt)

Formuleblad:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a$$

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = n! a^{n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi}\, \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = -\int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg|_a^b$$

Bolfuncties ($l \leq 1$):

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta$$
$$Y_1^{\pm 1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{\pm i\phi} \sin\theta$$

$$Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$
$$Y_2^{\pm 1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{\pm i\phi} \sin\theta \cos\theta$$
$$Y_2^{\pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{\pm 2i\phi} \sin^2\theta$$

Ladderoperatoren:

$$S_\pm |sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\,|s(m\pm 1)\rangle$$

Clebsch-Gordan-coefficiënten:

$\mathbf{1 \times 1/2}$	j / m	$3/2$ / $+1/2$	$1/2$ / $+1/2$
m_1	m_2		
$+1$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
0	$+1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\mathbf{1 \times 1/2}$	j / m	$3/2$ / $-1/2$	$1/2$ / $-1/2$
m_1	m_2		
0	$-1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
-1	$+1/2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\mathbf{2 \times 1/2}$	j / m	$5/2$ / $+3/2$	$3/2$ / $+3/2$
m_1	m_2		
$+2$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$+1$	$+1/2$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\mathbf{2 \times 1/2}$	j / m	$5/2$ / $+1/2$	$3/2$ / $+1/2$
m_1	m_2		
$+1$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
0	$+1/2$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\mathbf{2 \times 1/2}$	j / m	$5/2$ / $-1/2$	$3/2$ / $-1/2$
m_1	m_2		
0	$-1/2$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$
-1	$+1/2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\mathbf{2 \times 1/2}$	j / m	$5/2$ / $-3/2$	$3/2$ / $-3/2$
m_1	m_2		
-1	$-1/2$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$
-2	$+1/2$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$