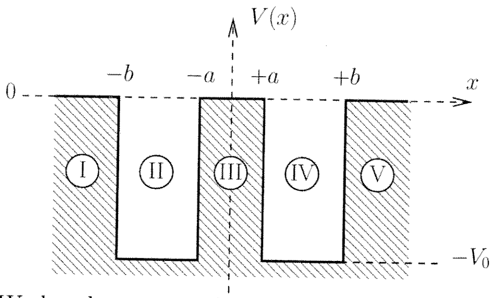
Tentamen NS202B: Quantum Mechanica 1a (8 November 2012)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

Niet vergeten:
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*
- *Totaal zijn er 30 punten.*

Opgave 1 – Dubbele, eindige potentiaalput



We beschouwen een deeltje met massa m in een dubbel, eindige potentiaalput, waarvoor de potentiaal gegeven wordt door:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -b & \text{(I)} \\ -V_0 & -b < x < -a & \text{(II)} \\ 0 & -a < x < +a & \text{(III)} \\ -V_0 & +a < x < +b & \text{(IV)} \\ 0 & +b < x < +\infty & \text{(V)} \end{cases}$$

We beschouwen in deze opgave alleen de situatie, waarvoor geldt voor de energie E: $-V_0 < E < 0$.

a) Geef de eigenfuncties van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking in de gebieden (I) t/m (V) en stel de randvoorwaarden op voor golffuncties op de posities $x = -b$, $-a$, $+a$, en $+b$. (*2 punten*)

b) Wat is de symmetrie-as voor het probleem? Beargumenteer, waarom er ten opzichte van deze symmetrie-as alleen *even* en *oneven* oplossingen mogelijk zijn. (*2 punten*)

In deze opgave beschouwen we alleen de *even* oplossingen.

c) Geef aan, hoe de randvoorwaarden reduceren voor de *even* oplossingen. (*2 punten*)

d) Elimineer zoveel mogelijk de amplituden van de golffuncties in de gebieden (I) t/m (V) uit de vergelijkingen voor de randvoorwaarden. Hoeveel onbekenden hou je uiteindelijk over? Op welke wijze kan je de overgebleven amplitude(n) bepalen? (*2 punten*)

Na eliminatie van de amplituden blijven de volgende vergelijkingen over, die alleen grafisch opgelost kunnen worden:

$$\begin{aligned} \kappa \tanh(\kappa a) &= -k \tan(ka - \phi), \\ k \tan(kb - \phi) &= \kappa \end{aligned}$$

Hierin is κ de golfvector in gebied (I), k de golfvector in gebied (II) en ϕ een willekeurige fase..

e) Waarom bestaan er vergelijkingen tussen κ en k? Wat zijn de gevolgen hiervan voor de mogelijke eigenfuncties? (*2 punten*)

Opgave 2 – Harmonische Oscillator

De grondtoestand van de één-dimensionele harmonische oscillator, waarbij de potentiaal gegeven is door $V(x) = {}^1\!/_2 m\omega^2 x^2$, wordt gegeven door

$$\psi_a(x) = Ae^{-x^2/2L^2}.$$

a) Bepaal L, zodat $\psi_a(x)$ een oplossing is van de tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking. Bepaal hieruit ook de energie E_a. (*2 punten*)

b) Bereken de normalisatie-constante A. (*2 punten*)

c) Laat zien dat $\psi_b(x) = L\frac{\mathrm{d}\psi_a(x)}{\mathrm{d}x}$ ook een oplossing is van de tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking en bepaal de energie E_b. (*2 punten*)

De ladder-operatoren zijn gegeven door de relaties:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{x} \mp i\hat{p}\right).$$

d) Laat zien, dat één van deze operatoren toegepast op $\psi_a(x)$ de eigenfunctie $\psi_b(x)$ oplevert. Wat levert de andere ladder-operator op, als hij toegepast wordt op $\psi_a(x)$? (*2 punten*)

De golffunctie van het systeem wordt gegeven op $t = 0$ door een lineaire superpositie van $\psi_a(x)$ en $\psi_b(x)$:

$$\Psi(x,0) = a\psi_a(x) + b\psi_b(x).$$

e) Wat is de tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi(x,t)$? Is de verwachtingwaarde van x in deze toestand tijdsafhankelijk? Zo nee, waarom niet? Zo ja, bereken de frequentie, waarmee de verwachtingswaarde oscilleert. (*2 punten*)

Opgave 3 – Golfpakket

Een golfpakket wordt gegeven door een superpositie $A(k)$ van vlakke golven:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx-\omega t)}\, dk.$$

We beschouwen allereerst een pakket met een Gaussische vorm:

$$A(k) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha(k-k_0)^2}{2}\right),$$

met k_0 de centrale golfvector.

a) Laat zien, dat voor dit golfpakket de golffunctie op $t=0$ gegeven is door

$$\Psi(x,0) = Ae^{ik_0x}e^{-ax^2}, \tag{1}$$

en bepaal a en A. (*Hint: verander de variabelen in de integraal met* $q = k - k_0$). (*2 punten*)
Als je niet uit dit onderdeel komt, gebruik verg. (1) in de rest van de opgave.

b) Bereken door integratie de verwachtingswaarde van x en x^2 op $t=0$. Leidt hieruit de onzekerheid in de plaats σ_x af. (*2 punten*)

c) Bereken door integratie de verwachtingswaarde van p en p^2 op $t=0$. Leidt hieruit de onzekerheid in de impuls σ_p af. (*2 punten*)

d) Hoe ziet de onzekerheidsrelatie van Heisenberg eruit en wat is de betekenis van deze relatie? Voldoen je antwoorden onder b) en c) hieraan. (*1 punt*)

We veronderstellen dat de frequentie $\omega(k)$ gegeven wordt door

$$\omega(k) = \omega_0 + (k-k_0)v_g + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\beta,$$

met de groepssnelheid $v_g = (\partial\omega/\partial k)_{k=k_0}$ en de dispersie $\beta = (\partial^2\omega/\partial k^2)_{k=k_0}$.

e) Laat zien dat bij afwezigheid van dispersie ($\beta = 0$) de integraal van de golfunctie voor $\Psi(x,t)$ alleen afhankelijk is van $(x - v_g t)$. Beargumenteer hiermee, dat het golfpakket in dat geval beweegt met de snelheid v_g. (*1 punt*)

De uitdrukking voor $\Psi(x,t)$ wordt voor $\beta \neq 0$ gegeven door

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i(k_0x - w_0t)}}{\sqrt{\alpha + i\beta t}} \exp\left(-\frac{(x-v_gt)^2}{2\alpha + 2i\beta t}\right).$$

f) Bepaal de waarschijnlijkheid $P(x,t)$ om het deeltje op tijdstip t op positie x aan te treffen. (*1 punt*)

g) Laat hieraan zien, dat ook in dit geval het golfpakket beweegt met de snelheid v_g. Laat verder zien door een vergelijking met het resultaat voor $\Psi(x,0)$ van onderdeel b), hoe de onzekerheid σ_x varieert in de tijd. (*1 punt*)

Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Integraal:

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x/a} \mathrm{d}x = n!\ a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} \mathrm{d}x = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g \ \mathrm{d}x + fg\Big|_a^b$$