Tentamen QM1b (3 Februari 2011)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek, geen grafische rekenmachine en en geen eigen formuleblad worden gebruikt.

Niet vergeten:
- *schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Hoe kan je een ket representeren voor een systeem met een discreet spectrum?

b. Als een ket Ψ in de plaatsrepresentatie gegeven is door de golffunctie $\Psi(x,t)$, wat is dan de bijbehorende bra in de plaatsrepresentatie?

c. Hoe ziet de matrixrepresentatie van een observabele (met diskrete eigenwaarden) eruit als je met een basis van eigentoestanden werkt?

d. Aan welke wiskundige relatie(s) moeten twee golffuncties voldoen die "Dirac-orthogonaal" zijn?

e. Wat betekent het als twee observabelen incompatibel zijn?

f. Wat is (precies!) de betekenis van Δt in de "energie–tijd onzekerheidsrelatie" $\Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$?

g. Geef de commutatierelaties voor de componenten van het impulsmoment.

h. De radiële Schrödingervergelijking kan met een "effectieve potentiaal" worden geschreven. Geef de centrifugaalterm in deze effectieve potentiaal.

i. Hoe groot is de bindingsenergie in de grondtoestand van waterstof ongeveer?

j. Hoe luidt het "Pauli uitsluitingsprincipe"?

(*1 punt per vraag*)

Opgave 2 - Formalisme

Bekijk een quantumsysteem met drie toestanden:

$$|\alpha\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |\beta\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \text{en} \quad |\gamma\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die een orthonormale basis van de toestandsruimte vormen.

a. De Hamiltoniaan van het systeem is

$$\hat{H} \equiv \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

met a, b, c en d complexe getallen. Toon aan dat de operator van de vorm

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a^* & 0 & c \\ 0 & c^* & 0 \end{pmatrix}$$

moet zijn. Bereken alle eigenwaarden van de Hamiltoniaan en de bijbehorende eigentoestanden. Kies dan $a \equiv c$ als reëel getal en toon aan dat de eigentoestanden en eigenwaarden gegeven zijn door:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ met } E_+ = a\sqrt{2}$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ met } E_0 = 0$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ met } E_- = -a\sqrt{2}$$

(2.5 punten)

b. Schrijf de toestanden $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ en $|\gamma\rangle$ als superpositie van de stationaire toestanden en geef de tijdsafhankelijkheid expliciet aan.
(1.5 punten)

Opgave 3 - Spin

We kijken naar een systeem met spin $\frac{1}{2}$. We werken in de basis van eigentoestanden van $\hat{S}_z$.

a. Gebruik de eigenwaardevergelijking voor $\hat{S}_z$ en de vergelijkingen voor de ladderoperatoren:

$$S_\pm |sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\, |s(m\pm 1)\rangle$$

om de matrixrepresentatie van de operatoren $\hat{S}_z$, $\hat{S}_+$ en $\hat{S}_-$ op te schrijven. Toon daarmee aan dat de matrices voor $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$ gegeven zijn door:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Laat zien dat deze aan de commutatierelatie tussen $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$ voldoen.

(1.5 punten)

V b. Toon aan dat de eigenspinoren van $\hat{S}_y$ gegeven zijn als:

$$\chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

en

$$\chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

en dat deze vectoren orthonormaal zijn.

(1.5 punten)

c. Een deeltje bevindt zich in de toestand:

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Metingen leveren de verwachtingswaarden

$$\langle S_x \rangle = \frac{2}{5}\hbar,$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\sqrt{2}}{5}\hbar$$

en

$$\langle S_z \rangle = -\frac{1}{10}\hbar$$

Bepaal daaruit samen met de normalisatie de componenten α en β. Veronderstel dat α een reëel getal is.

(2.5 punten)

d. Het deeltje is op $t = 0$ in de toestand

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1 - |a|^2} \end{pmatrix}$$

met a reëel. We schakelen een magnetisch veld langs de z-richting aan. De Hamiltoniaan is dus:

$$\hat{H} = -\gamma B \hat{S}_z.$$

Bepaal de tijdsafhankelijke golffunctie $\phi(t)$. Bij $t > 0$ meten we $\hat{S}_x$. Geef de mogelijke meetresultaten met de bijbehorende kansen aan.
(*2.5 punten*)

Opgave 4 - Waterstofatoom

Het elektron in een waterstofatoom is in de toestand

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R_{32}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^1\chi_+ + \frac{2}{\sqrt{5}}Y_2^2\chi_-\right),$$

waarbij $\chi_\pm$ de spintoestand van het elektron aangeeft.

a. Geef de mogelijke meetwaarden voor L^2, L_z, S^2 en S_z en de bijbehorende kansen aan.
(2.5 punten)

b. Schrijf het hoekafhankelijke deel van de golffunctie als superpositie van toestanden met bepaalde waarde van totaal impulsmoment $\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}$. Geef de mogelijke meetwaarden voor J^2 en J_z en de bijbehorende kansen aan.
(3 punten)

c. Laat zien dat de kansdichtheid $W(r,\theta,\phi)$ het deeltje op de plaats r,θ,ϕ te vinden gegeven wordt door:

$$W = \frac{1}{5\cdot 81^2\pi a^7} r^4 \sin^2\theta \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right).$$

Voor welke waarden van r,θ,ϕ is de kansdichtheid het grootst het deeltje te vinden?
(2.5 punten)

Clebsch-Gordan-coëfficiënten:

$1/2\times1/2$ j / m		1 / 0	0 / 0
m_1	m_2		
$+1/2$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-1/2$	$+1/2$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$1\times1/2$ j / m		$3/2$ / $+1/2$	$1/2$ / $+1/2$
m_1	m_2		
$+1$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
0	$+1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

$1\times1/2$ j / m		$3/2$ / $-1/2$	$1/2$ / $-1/2$
m_1	m_2		
0	$-1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
-1	$+1/2$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$2\times1/2$ j / m		$5/2$ / $+1/2$	$3/2$ / $+1/2$
m_1	m_2		
$+1$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
0	$+1/2$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$

$2\times1/2$ j / m		$5/2$ / $+3/2$	$3/2$ / $+3/2$
m_1	m_2		
$+2$	$-1/2$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$+1$	$+1/2$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$

$2\times1/2$ j / m		$5/2$ / $-1/2$	$3/2$ / $-1/2$
m_1	m_2		
0	$-1/2$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$
-1	$+1/2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$2\times1/2$ j / m		$5/2$ / $-3/2$	$3/2$ / $-3/2$
m_1	m_2		
-1	$-1/2$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$
-2	$+1/2$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$

Bolfuncties:

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} \left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \cos\theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta \, e^{\pm 2i\phi}$$

Radiële golffunctie:

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-3/2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$