Tentamen NS202B: Quantum Mechanica 1 (30 Januari 2015)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

Niet vergeten:
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel–)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*
- *Totaal zijn er 30 punten.*

Opgave 1 – Harmonische oscillator

De ladder-operatoren worden gegeven door de relaties:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{x} \mp i\hat{p}\right).$$

De ladder-operatoren werken op de eigentoestanden ψ_n als $a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ en $a_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$

a) Laat zien m.b.v. de canonieke commutatie-relatie tussen $\hat{x}$ en $\hat{p}$, dat (*1 punt*)

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1.$$

b) Bepaal de Hamiltoniaan $\mathcal{H}$ van de harmonische oscillator m.b.v. de ladder-operatoren gegeven de potentiaal $V(x) = {}^1\!/_2 m\omega^2 x^2$. (*2 punten*)

c) Bereken de verwachtingswaarde van $\mathcal{H}$ in toestand ψ_n. (*1 punt*)

d) Toon aan door gebruik te maken van een ladder-operator, dat gegeven de eerste aangeslagen toestand

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

de grondtoestand gegeven wordt door (*2 punten*)

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

Op $t = 0$ is de golffunctie van het deeltje gegeven door

$$\Psi(x,0) = C\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + 4\right)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

e) Bereken de normalisatie C. *Tip: Je kan $\Psi(x,0)$ het beste uitdrukken als een superpositie van de eerste twee toestanden, die beide zelf al genormaliseerd zijn.* (*1 punt*)

f) Bereken de verwachtswaarde van de positie x, als de golffunctie van het deeltje gegeven wordt door $\Psi(x,0)$. *Tip, als je het antwoord op de vorige vraag niet hebt, gebruik dan $\Psi(x,0) = \alpha\psi_0(x) + \beta\psi_1(x)$ met α, β willekeurige constanten.* (*2 punten*)

g) Bereken de tijdsafhankelijkheid van de golffunctie $\Psi(x,t)$. Is voor deze golffunctie de verwachtingswaarde van de positie tijds-afhankelijk? Beargumenteer je antwoord in fysische termen. (*1 punt*)

Opgave 2 – Elektron met spin $\hbar/2$

Voor een elektron met spin $1/2$ zijn de matrix-representaties van S_x, S_y en S_z in de basis van S_z is gegeven door

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix-representaties van S_+ en S_-. (*2 punten*)

We prepareren elektronen in een toestand χ gegeven door

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

met de normalisatie-conditie $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

b) Bepaal de verwachtingswaarde $\langle S_x \rangle$ in deze toestand. Laat zien, dat de verwachtingswaarde een reële grootheid is. (*2 punten*)

c) Bepaal de verwachtingswaarde $\langle S_y \rangle$ in deze toestand. Laat zien, dat de verwachtingswaarde een reële grootheid is. (*2 punten*)

Meting van de verwachtingswaarden levert $\langle S_x \rangle = 0$, $\langle S_y \rangle = -\sqrt{2}\hbar/3$, en $\langle S_z \rangle = -\hbar/6$.

d) Waarom kan ik a altijd reëel kiezen? Hoeveel van de drie hierboven gegeven verwachtingswaarden heb je naast de normalisatie-conditie nodig om a en b volledig te bepalen? Beargumenteer je antwoord. (*2 punten*)

e) Bepaal de coefficiënten a en b. *Tip: kies a reëel.* (*2 punten*)

Opgave 3 – Onzekerheidsrelatie grondtoestand H

De onzekerheidsrelaties in drie dimensies zijn gegeven door

$$\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \sigma_y\sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \sigma_z\sigma_{p_z} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

We willen deze relaties onderzoeken voor de grondtoestand van waterstof door $\sigma_z\sigma_{p_z}$ te berekenen. De golffunctie in de grondtoestand is gegeven door

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} e^{-r/a_0}.$$

a) Maakt het uit voor het resultaat, welke richting we kiezen? Waarom kiezen we hier de z-richting? *(2 punten)*

b) Bereken de verwachtingswaarde $\langle z\rangle$ voor de grondtoestand. Laat zien, dat je de verwachtingswaarde kan splitsen in een deel dat alleen afhankelijk is van de straal r, en een deel dat alleen afhankelijk is van de hoeken (θ,ϕ). *(2 punten)*

c) Laat zien, dat $\langle z^2\rangle = a_0{}^2$. *(2 punten)*

d) Gebruik de operator voor p_z in termen van z om de verwachtingswaarde $\langle p_z\rangle$ te berekenen. Beargumenteer het resultaat in fysische termen. *(2 punten)* *Tip: gebruik de kettingregel*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}.$$

e) Gebruik $\langle p_z{}^2\rangle = \hbar^2/3a_0{}^2$ en de resultaten van b)–d) om het product $\sigma_z\sigma_{p_z}$ te bepalen. Voldoet het resultaat aan de Heisenberg onzekerheids-relatie? *(2 punten)*

Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Integraal:

$$\int x \sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax)$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x/a}\mathrm{d}x = n!\, a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g\,\mathrm{d}x + fg\Big|_a^b$$

Waterstof atoom:

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \qquad \text{met} \qquad R = \frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{eV}$$