1

Faculteit Natuur- en Sterrenkunde
BOZ/Julius Instituut

Tentamenvoorblad
(gaarne zo volledig mogelijk invullen)

vak: NS-202B (kwantummechanica 1)

tentamennr.*: 2008/2009 - 16

d.d.: donderdag 29 januari 2009

vanaf: 15.00 uur tot 18.00 uur

gebouw*: MG zaal*: kantine

bijzonderheden:

open boektentamen: neen
formuleblad: geen eigen formuleblad
rekenmachine: geen grafische rekenmachine

*) wordt door BOZ ingevuld

Tentamen QM1b - met vorbeeldoplossingen

Opgave 1 - Concepten en Begrippen

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Als een ket $|\alpha\rangle$ gegeven is door een kolomvector met complexe componenten, wat is dan de bijbehorende bra?

b. Hoe wordt in de formalisme van de quantummechanica ervoor gezorgd dat meetwaarden reële getallen zijn?

c. Hoe luidt het algemene onzekerheidsprincipe voor een paar observabelen $\hat{X}$, $\hat{Y}$?

d. Wat is de meetuitkomst voor een observabele als het systeem door een eigenfunctie van de bijbehorende operator wordt beschreven?

e. Geef de kanonieke commutatierelaties voor de componenten van het impulsmoment.

f. Hoe wordt de $s = 1$, $m = 0$ (triplet) toestand samengesteld uit de toestanden van de twee spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes?

g. Hoe luidt de radiële Schrödinger-vergelijking voor een centrale potentiaal?

h. Hoe groot is de Bohr-straal ongeveer?

i. Als je twee eigenvectoren van een observabele met verschillende eigenwaarden hebt, geef daarvoor het resultaat van het scalaire product van die eigenvectoren aan.

j. Wat zijn de symmetrieeisen bij verwisseling van deeltjes voor een golffunctie van twee identieke deeltjes?

(1 punt per vraag)

Opgave 2

We kijken naar een systeem met spin $\frac{1}{2}$.

a. Wat is de matrixrepresentatie van de ladderoperatoren in de basis van eigentoestanden van $\hat{S}_z$? Bereken daaruit de matrixrepresentatie en de eigentoestanden van $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$.

(2.5 punten)

b. De toestand van het deeltje is gegeven door:

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Metingen leveren de verwachtingswaarden

$$\langle S_x \rangle = 0,$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{3}\hbar$$

en

$$\langle S_z \rangle = -\frac{1}{6}\hbar$$

Bepaal daaruit en met de normalisatie de componenten α en β. Waarom kan je altijd α reëel kiezen? Wat is de kans van de meetuitkomst $+\hbar/2$ bij een meting van $\hat{S}_z$?

(3 punten)

c. Bereken de onzekerheid σ_{S_z} voor de toestand χ. (Maak gebruik van de informatie uit onderdeel b.)

(1.5 punten)

d. We meten nu $\hat{S}_x$ in de toestand χ. Geef de toestand χ' na de meting aan als de meetuitkomst $-\hbar/2$ is. Daarna meten we $\hat{S}_y$. Bereken de kansen voor $\hat{S}_y$ in de toestand χ' een waarde van $+\hbar/2$ of $-\hbar/2$ te meten?

(2 punten)

e. Geef de matrixrepresentatie van de projectieoperatoren op de eigentoestanden $\left|\chi_\pm^{(x)}\right\rangle$ van $\hat{S}_x$. Deze zijn gedefinieerd als:

$$\hat{P}_\pm^{(x)} \equiv \left|\chi_\pm^{(x)}\right\rangle \left\langle\chi_\pm^{(x)}\right|.$$

Toon aan dat de volleigheidsrelatie:

$$\hat{P}_+^{(x)} + \hat{P}_-^{(x)} = \mathbb{1}$$

geldt.

(1 punt)

Opgave 3

a. Toon aan dat de tijdsafgeleide van de verwachtingswaarde van een observabele $\hat{Q}$ gelijk is aan:

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

(2 punten)

b. Toon aan hoe je daaruit in een dimensie bij een Hamiltoniaan van de vorm $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}(x)$ het theorema van Ehrenfest kan afleiden:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

(2.5 punten)

c. We kijken nu naar een geladen deeltje met spin $\vec{S}$ en magnetisch moment $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ in een magneetveld $\vec{B} = B_0\hat{z}$. De Hamiltoniaan van de wisselwerking van het magnetisch moment met het magneetveld is gegeven door: $\hat{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Geef de eigenwaarden van de energie voor een deeltje met spin 1/2 aan. Gebruik de vergelijking uit a. met deze Hamiltoniaan om

$$\frac{d\langle S_x\rangle}{dt}, \quad \frac{d\langle S_y\rangle}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{d\langle S_z\rangle}{dt}$$

te berekenen. Toon aan dat voor $\langle S_x\rangle$ de relatie:

$$\frac{d^2\langle S_x\rangle}{dt^2} = -(\gamma B_0)^2\langle S_x\rangle$$

geldt.

(3.5 punten)

d. Geef de algemene oplossingen voor $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ en $\langle S_z\rangle$ als functie van de tijd aan. Het gedrag van $\langle S_x\rangle$ en $\langle S_y\rangle$ toont een bepaalde frekwentie. Geef die aan en vergelijk de frekwentie met de energie van de eigentoestanden uit c. Toon aan dat:

$$\frac{d}{dt}\left(\langle S_x\rangle^2 + \langle S_y\rangle^2\right) = 0.$$

(2 punten)

Ter herinnering:

Ladder-Operatoren:

$$J_{\pm}\,|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j(m \pm 1)\rangle$$