

Tussentoets NS202B: Quantum Mechanics (28 november 2014)

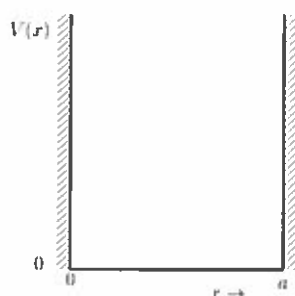
Algemeen:

- de duur van de tussentoets is 45 minuten.
- er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op de achterkant).

Niet vergeten:

- Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel-)vraag nummers!
- Lever alles op 1 vel in!
- Schrijf op dit vel je naam en studentnummer!
- Totaal zijn er 10 punten.

Opgave – Oneindig diepe potentiaalput



We beschouwen een deeltje met massa m in een oneindig diepe potentiaalput, waarvoor de potentiaal gegeven wordt door:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ +\infty & x < 0 \text{ of } x > a \end{cases}$$

- a) Laat zien dat in dit geval de functies gegeven door

$$\psi_n = A_n \sin(nkx), \quad 0 \leq x \leq a$$

met $n = 1, 2, \dots$, oplossingen van de Schrödinger vergelijking zijn. Bepaal het golfgetal k en de norm A_n . (2 punten)

- b) Bereken de energie in de toestand ψ_n . (2 punten)

De orthonormaliteits-relatie van de oplossingen wordt gegeven door

$$\int_0^a \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

- c) Laat zien, dat de oplossingen voor $m=1$ en $n=4$ orthonormaal zijn. (2 punten)

Op $t = 0$ wordt de toestand van het deeltje gegeven door de golf functie $\Psi(x, 0)$:

$$\Psi(x, 0) = D \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \right],$$

met D de normalisatie constante.

- d) Bepaal door gebruik te maken van de orthonormaliteits-relatie de normalisatie constante D . (Het is hier uitdrukkelijk niet de bedoeling om te integreren.) (2 punten)
- e) Laat zien dat de waarschijnlijkheid voor het aantreffen van een deeltje op positie x tijdsafhankelijk is. (2 punten)

Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet noodzakelijk er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Integraal:

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x/a} dx = n! a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg \Big|_a^b$$

Heisenberg onzekerheidsrelatie:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Canonieke commutatie-relatie:

$$[x, p] = i\hbar$$

Ladder operatoren:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$