Tentamen NS202B: Quantum Mechanica 1 (11 Maart 2015)

Algemeen:
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

Niet vergeten:
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel-)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*
- *Totaal zijn er 30 punten.*

Opgave – Harmonische oscillator

De grondtoestand van de één-dimensionele harmonische oscillator, waarbij de potentiaal wordt gegeven door $V(x) = {}^1\!/\!_2 m\omega^2 x^2$, wordt gegeven door

$$\psi_a(x) = Ae^{-x^2/2L^2}.$$

a) Bepaal L, zodat $\psi_a(x)$ een oplossing is van de tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking. *(1 punt)*

b) Bepaal de energie E_a van de toestand ψ_a. *(1 punt)*

c) Bepaal de normalisatie-constante A. *(1 punt)*

De ladder-operatoren zijn gegeven door de relaties:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{x} \mp i\hat{p}\right).$$

d) Bepaal het resultaat van de annihilatie-operator $\hat{a}_-$ op $\psi_a(x)$. Wat zegt het resultaat over de toestand $\psi_a(x)$? *(2 punten)*

e) Bepaal de golffunctie $\psi_b(x)$ gegeven door $\psi_b(x) = \hat{a}_+\psi_a(x)$. Wat is zonder expliciete berekening de energie van toestand $\psi_b(x)$? Beargumenteer uw antwoord. *(2 punten)*

Op $t = 0$ wordt de golffunctie van het systeem gegeven door een lineaire superpositie van $\psi_a(x)$ en $\psi_b(x)$:

$$\Psi(x,0) = a\psi_a(x) + b\psi_b(x).$$

f) Wat is de tijdsafhanklijke golffunctie $\Psi(x,t)$? *(1 punt)*

g) Is de verwachtingswaarde van x in de toestand tijdsafhankelijk? Zo nee, waarom niet? Zo ja, bereken de frequentie, waarmee de verwachtingswaarde oscilleert. *(2 punten)*

Opgave 2 – Elektron met spin $\hbar/2$

Voor een elektron met spin $1/2$ zijn de matrix-representaties van S_+, S_- en S_z in de basis van S_z is gegeven door

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix-representaties van S_x en S_y. (*1 punt*)

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van S_x. (*2 punten*)

De toestand van het elektron met spin $1/2$ wordt gegeven door de spinor χ, die gegeven is in de basis van S_z:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

met a en b complexe getallen, die voldoen aan $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

c) Bereken de waarschijnlijkheid om bij een meting van S_x de eigenwaarde $+\hbar/2$ te meten, of de eigenwaarde $-\hbar/2$. (*2 punten*)

d) Wat moet de som van de waarschijnlijkheden zijn onder c) en waarom? Voldoet uw resultaat hieraan? (*1 punt*)

Het elektron bevindt zich in de toestand χ, als we een meting doen van S_z. Bij deze meting hebben we de waarde $+\hbar/2$ bepaald.

e) Wat is de waarschijnlijkheid om vervolgens bij een meting van S_x de waarde $\pm\hbar/2$ te meten? (*1 punt*)

f) Waarom verschilt uw antwoord onder e) van uw antwoord onder c)? Wat voor conclusie kunt u daaruit trekken voor de gevolgen van een meting in de quantum-mechanica? (*1 punt*)

We leggen een magneetveld B_0 aan in de x-richting en de Hamiltoniaan wordt dan gegeven door

$$\mathcal{H} = -\gamma B_0 S_x.$$

Het elektron bevindt zich op $t = 0$ in de toestand χ.

g) Geef de tijdsafhankelijkheid van de waarschijnlijkheid om op tijdstip t bij een meting van S_x de waarde $+\hbar/2$ te meten. (*2 punten*)

Opgave 3 – Het Paschen-Back effect

We bekijken het Zeeman effect voor waterstof in een sterk magneetveld. De Hamiltoniaan wordt gegeven door

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right) \cdot \vec{B}.$$

a) Geef aan, waarom bij de behandeling van dit probleem normaal de richting van het magneetveld langs de z-as gekozen wordt. Zal een keuze in een andere richting een ander resultaat opleveren? (*1 punt*)

We kiezen in deze opgave het magneetveld in de z-richting.

b) Welke operator commuteert met de Hamiltoniaan, waardoor m_ℓ een goed quantum-getal is? En welke andere operator doet dat, waardoor m_s een goed quantum-getal is? (*1 punt*)

De waterstof eigenfuncties $\Psi_{n\ell m_\ell s m_s} \equiv \psi_{n\ell m_\ell}(\vec{r})\chi_{s m_s}$ zijn daardoor de juiste golffuncties om het effect van het magneetveld te berekenen.

c) Laat zien, dat de verschuiving door het magneetveld gegeven wordt door

$$E = E_n + \mu_B B_z \left(m_\ell + 2m_s\right),$$

met E_n de energie van de toestanden voor $B_z = 0$. (*2 punten*)

We beschouwen een overgang van een 3s- naar een 3p-toestand in natrium, waarvoor de volgende selectie-regels gelden:

$$\Delta m_\ell = 0, \pm 1, \qquad \Delta m_s = 0.$$

d) Laat zien dat de overgangsfrequentie opsplitst in drie lijnen en bereken de afstand tussen de drie lijnen. (*2 punten*)

Voor dit sterke magneetveld willen we ook nog het effect van spin-baan koppeling beschrijven, waarbij we aannemen dat de verschuiving t.g.v. de spin-baan wisselwerking veel kleiner is dan de verschuiving door het magneetveld. We zullen de spin-baan wisselwerking met storingsrekening berekenen. De storing wordt dan gegeven door

$$\mathcal{H}' = \xi(r)\vec{L} \cdot \vec{S},$$

met $\xi(r)$ een functie, die alleen van de afstand r van het electron tot de kern afhangt.

e) Laat zien dat het inproduct in de storing geschreven kan worden als

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}L_+S_- + \frac{1}{2}L_-S_+ + L_zS_z,$$

met $L_\pm$ en $S_\pm$ de ladder-operatoren zijn voor het baan- en spin-impulsmoment, respectievelijk. (*2 punten*)

f) Laat zien dat in 1^{ste}-orde storingsrekening alleen de laatste van deze drie termen een bijdrage levert aan de verschuiving door de spin-baan wisselwerking. (*2 punten*)

Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Integraal:

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x/a} \mathrm{d}x = n!\, a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} \mathrm{d}x = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g \, \mathrm{d}x + fg \Big|_a^b$$

Waterstof atoom:

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \qquad \text{met} \qquad R = \frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$