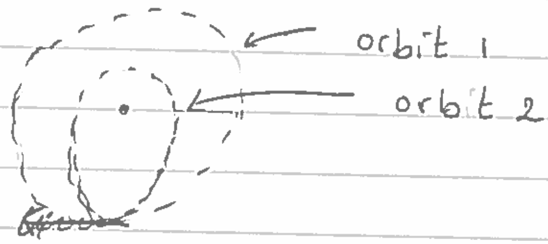
Uitwerkingen tentamen Mechanica 2016

1



Baan 1 is de cirkelvormige baan
Baan 2 is de baan waar we naartoe willen aangezien $a_2 < a_1$. Waarbij a_1 en a_2 de lange halve as van baan 1 en 2 zijn. Met $a_2 < a_1$ zien we namelijk

$$\tau_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{GM} < \frac{4\pi a_1^3}{GM} < \tau_1^2$$

Dus $\tau_2 < \tau_1$. Met een kortere omlooptijd zal het object in baan 2 de ISS in baan 1 uiteindelijk inhalen.

Om van baan 1 naar baan 2 te komen moet een snelheidsboost in de ~~tegengestelde~~ richting van $\vec{v}$ gegeven worden.
($\vec{v}$ moet kleiner worden)

2 $m, M,$ $F = -cv$ voor blok hout

a $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

b $$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m v_1 + M v_2}{m+M} = \frac{m v_0}{m+M}$$

$$\Delta v = v_1 - v_2 = v_0 - 0 = v_0$$

c
$$v_{cm} = \frac{p_1 + p_2}{m+M}$$

vlak na de botsing is er nog een wrijving
dus $p_1 + p_2$ is behouden dus

$$v_{cm,na} = v_{cm,voor} = \frac{m v_0}{m+M}$$

Objecten zitten aan elkaar dus $\Delta v = 0$

d $F = m_{tot} \ddot{x} = (m+M)\ddot{x} = -cv = (m+M)\dot{v}$

dus $(m+M)\dot{v} = -cv$

e Deze differentiaal vergelijking heeft algemene oplossing:

$$v(t) = A e^{-\frac{c}{m+M} t} \quad \text{met } A \in \mathbb{R}$$

$\Delta v = 0$, dus $v_{cm,na} = v_{1,na} = v_{2,na} = v(0)$

Hiermee volgt

$$v(0) = A = \frac{m v_0}{m+M}$$

3 $\quad F(v) = -cv^2 \qquad v(0) = v_0 > 0$

a $\quad F = ma = m\dot{v} = -cv^2$

$$-\frac{1}{v^2}\,dv = \frac{c}{m}\,dt$$

b
$$\int_{v_0}^{v} -\frac{1}{v^2}\,dv = \int_0^t \frac{c}{m}\,dt$$

$$\left[\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = \left[\frac{c}{m}t\right]_0^t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{c}{m}t$$

c
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{c}{m}t$$

$$v(t) = \frac{1}{1/v_0 + \frac{c}{m}t} = \frac{v_0}{1 + \frac{cv_0}{m}t}$$

d
$$F(v) = mg - cv^2 = 0$$

$$cv^2 = mg$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} = v_{eind}$$

Dus $\quad V(t) = \frac{m v_0}{m+M} e^{-\frac{c}{m+M} t}$

f $\quad x(t) = \int_0^t v(t')\, dt' = \int_0^t \frac{m v_0}{m+M} e^{-\frac{c}{m+M} t'} dt'$

$$= \left[- \frac{m v_0}{m+M} \cdot \frac{m+M}{c} e^{-\frac{c}{m+M} t'} \right]_0^t$$

$$= \frac{m v_0}{c} - \frac{m v_0}{c} e^{-\frac{c}{m+M} t}$$

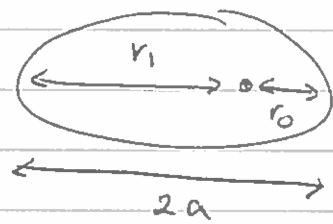
g $\quad$ We weten : m, M, C, x_{eind} en willen weten v_0. We zien dat het blok nooit "echt" tot stilstand komt, maar

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{m v_0}{c} = x_{eind}$$

Dus $\quad v_0 = \frac{c}{m} x_{eind}$

b is gebruikt bij c:

$$r_0 + r_1 = 2a$$



Dus $\quad r_1 = 2a - r_0$

d Formule 5:

$$e = \frac{L^2}{Gm^2 M r_0} - 1$$

Dus $\quad L^2 = GMm^2 r_0 (1+e)$

$$L = m\sqrt{GM r_0 (1+e)}$$

e $\quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$

op dichtste en verste nadering geldt

$$\vec{r} \perp \vec{v}$$

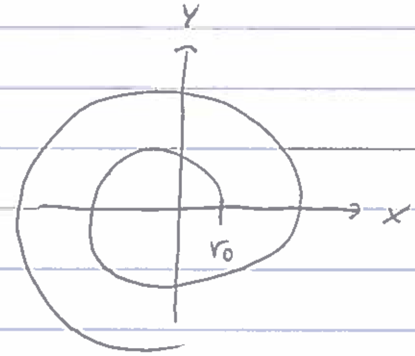
Dus $L = |\vec{L}| = mrv$ in die punten

Hier mee volgt:

$$v_0 = \frac{L}{m r_0}, \quad v_1 = \frac{L}{m r_1}$$

4 $\quad r(\theta) = r_0 e^{-\alpha\theta} \qquad \alpha > 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

a



b $\quad u = \dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{1}{r_0} e^{\alpha\theta}$

c $\quad \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{1}{r_0} \alpha^2 e^{\alpha\theta}$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{r_0} e^{\alpha\theta} (1 + \alpha^2) = -\frac{mF}{u^2 L^2}$$

$$= -\frac{mF}{L^2} \left(\frac{1}{r_0} e^{\alpha\theta}\right)^{-2}$$

d $\quad F = -\dfrac{L^2}{m} \left(\dfrac{1}{r_0} e^{\alpha\theta}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{r_0} e^{\alpha\theta} (1+\alpha^2)$

$$= -\frac{L^2}{m} (1+\alpha^2) \frac{1}{r_0^3} e^{3\alpha\theta}$$

$$= -\frac{L^2}{m} (1+\alpha^2) \frac{1}{(r(\theta))^3}$$

Dus $\quad F(r) = -\dfrac{L^2}{m} (1+\alpha^2) \dfrac{1}{r^3}$

5

a $\tau = 75.3$ jaar

$r_0 = 87.7 \cdot 10^6$ km

b $\tau^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$ (formule 7)

$a = \sqrt[3]{\dfrac{GM\tau^2}{4\pi^2}}$ met $\tau = 75.3 \cdot$ aantal seconden in jaar

$G = 6.67408 \cdot 10^{-11}$

$M \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg

c

$r_1 = r(\pi) = r_0 \dfrac{1+e}{1+e\cos(\pi)}$ (formule 4)

$= r_0 \dfrac{1+e}{1-e}$

dus $r_1(1-e) = r_0(1+e)$

$r_1 - r_0 = e(r_1 + r_0)$

dus $e = \dfrac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}$

Nu invullen r_0 is gegeven en

$r_1 = 2a - r_0$

Want $2a$ is de hele lange as.

5 e

Het antwoord uit d:

$$V_0 = \frac{L}{m r_0} = \frac{m\sqrt{GM r_0(1+e)}}{m r_0}$$

$$= \sqrt{\frac{GM(1+e)}{r_0}}$$

$$V_1 = \frac{m\sqrt{GM r_0(1+e)}}{m r_1} = \frac{L}{m r_1}$$

$$= \sqrt{\frac{GM r_0(1+e)}{r_1^2}}$$

r_0, r_1 en e zijn bekend, dus invullen maar.

f Dit moet een open baan worden
Dus hyperbolisch of parabolisch.
Hierbij hoort eccentriciteit:

$$e \geq 1$$

g $$V_{nieuw} = V_0 = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{r_0}} \geq \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

uit e, de opgave

h $\Delta V = V_{nieuw} - V_0$